Klasická predikátová logika

Matematická logika, LS 2012/13, závěrečná přednáška

Libor Běhounek

www.cs.cas.cz/behounek/teaching/malog12

PřF OU, 6. 5. 2013

Symboly klasické predikátové logiky

Poznámky

- Motivace a příklady byly podány v předchozích 2 přednáškách
- „Klasická predikátová logika“ budeme zkracovat „KPL“

Symboly v jazyce KPL

- Výrokové spojky: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \ldots$
- Kvantifikátory: $\forall, \exists$
- Objektové proměnné: $x, y, z, \ldots$
- Objektové konstanty: $a, b, c, \ldots$
- Funkční symboly: $f, g, h, \ldots$ (každý s přiřazenou aritou)
- Predikátové symboly: $P, Q, R, \ldots$ (každý s přiřazenou aritou)

Jazyk KPL

Logické a mimologické symboly

- Spojky, kvantifikátory a proměnné = logické symboly
- Konstanty, funktory a predikáty = mimologické symboly

Logické symboly mají význam vždy stejný, kdežto význam mimologických symbolů se může měnit

Zadání jazyka

Jazyk = předem zafixovaný seznam mimologických symbolů, tj.:

- objektových konstant (jmen),
- predikátů (s vyznačením arit)
- a funktorů (s vyznačením arit)

Formule a termy

Formule vs. termy

Ze symbolů jazyka KPL tvoříme výrazy zvané *formule* a *termy:*

- Formule označují výroky (mají pravdivostní hodnoty)
- Termy označují objekty (prvky domény diskurzu)

Vytváření termů a formulí

- Formule jsou výsledkem aplikace výrokových spojek a kvantifikátorů (na formule) či predikátů (na termy)
- Termy jsou objektové proměnné a konstanty či vznikají aplikací funkčních symbolů (na termy)

Termy KPL

Definice

Term jazyka L je výraz vzniklý konečným počtem rekurzivní aplikace těchto pravidel:

- Každá objektová proměnná x je termem jazyka L
- Každá objektová konstanta c jazyka L je termem jazyka L
- Je-li f n-ární funkční symbol z jazyka L a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy jazyka L, pak výraz $f(t_1, \dots, t_n)$ je termem jazyka L

Formule KPL

Definice

Formule jazyka L je výraz vzniklý konečným počtem rekurzivní aplikace těchto pravidel:

- Je-li P n-ární predikátový symbol z jazyka L a $t_1, \dots, t_n$ jsou termy jazyka L, pak výraz $P(t_1, \dots, t_n)$ je (atomickou) formulí jazyka L
- Jsou-li φ, ψ formule jazyka L, pak výrazy $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou formule jazyka L
- Je-li x objektová proměnná a φ formule jazyka L, pak výrazy $(\forall x)\varphi$ a $(\exists x)\varphi$ jsou formule jazyka L

Volné a vázané proměnné

Definice

- Podformuli φ podformule $(\forall x)\varphi$ či $(\exists x)\varphi$ formule ψ nazýváme dosahem (tohoto výskytu) kvantifikátoru $(\forall x)$ resp. $(\exists x)$ ve formuli ψ
- Výskyty proměnné x v dosahu kvantifikátoru $(\forall x)$ či $(\exists x)$ nazýváme vázanými (tímto kvantifikátorem)
- Výskyty proměnné ve formuli ψ, které nejsou vázané žádným kvantifikátorem v ψ, nazýváme volnými výskyty této proměnné ve formuli ψ
- Značení: $\varphi[t/x]$ = formule, která vznikne nahrazením *všech* výskytů proměnné x ve formuli φ termem t
- Term t je substituovatelný za proměnnou x ve formuli φ, pokud žádná proměnná vyskytující se v t se nestane vázanou ve formuli $\varphi[t/x]$

Sémantika KPL

Význam prvků jazyka

V modelu M pro jazyk L interpretujeme prvky jazyka takto:

- univerzum (obor proměnných): neprázdná množina D_M
- objektová konstanta c: prvek c_M
- unární predikát P: podmnožina $P_M \subseteq D_M$
- binární predikát Q: relace $Q_M \subseteq D_M \times D_M$
- n-ární predikát R: n-ární relace $R_M \subseteq {D_M}^n$
- unární funktor f: funkce $f_M\colon D_M \to D_M$
- binární funktor g: binární funkce $g_M\colon D_M \times D_M \to D_M$
- n-ární funktor h: n-ární funkce $h_M\colon {D_M}^n \to D_M$

Pravdivost v modelu

Abychom mohli vyhodnotit pravdivostní hodnoty formulí a význam termů jazyka L v daném modelu M, musí být určeno ohodnocení objektových proměnných v D_M:

$$v\colon \mathrm{Var} \to D_M$$

Formule mají určenou pravdivost, je-li zadán model M a ohodnocení proměnných v

Význam termů a formulí

Podobně jako ve výrokové logice, je pravdivostní hodnota formule φ (a význam termu t) v modelu M při ohodnocení v (značení: $\|\varphi\|_{M,v}$ resp. $\|t\|_{M,v}$) definována rekurzivně podle stavby formule tzv. *Tarského podmínkami*

Význam termů a formulí

Tarského podmínky v KPL

$$\|c\|_{M,v} = c_M$$

$$\|x\|_{M,v} = v(x)$$

$$\|f(t_1,\dots,t_n)\|_{M,v} = f_M(\|t_1\|_{M,v},\dots,\|t_n\|_{M,v})$$

$$\|P(t_1,\dots,t_n)\|_{M,v} = P_M(\|t_1\|_{M,v},\dots,\|t_n\|_{M,v})$$

$$\|\varphi\wedge\psi\|_{M,v} = F_\wedge(\|\varphi\|_{M,v},\|\psi\|_{M,v}) \text{ a podobně pro } \neg, \vee, \dots$$

$$\|(\forall x)\varphi\|_{M,v} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \|\varphi\|_{M,v_q} = 1 \text{ pro každé } q \in D_M \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\|(\exists x)\varphi\|_{M,v} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \|\varphi\|_{M,v_q} = 1 \text{ pro nějaké } q \in D_M \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

přičemž v_q přiřazuje proměnné x prvek $q \in D_M$ a jinak je shodné s v

Tautologie KPL

Definice

Formule KPL je tautologie, pokud je pravdivá v každém modelu (pro daný jazyk) a při každém ohodnocení proměnných v tomto modelu

Podobně se v KPL definuje vyplývání, logická ekvivalence a další pojmy známé z klasické výrokové logiky

Pro KPL platí mnoho tvrzení obdobných těm, které jsme poznali ve výrokové logice (věta o substituci, kompaktnosti apod.).

Jejich výklad je již mimo časově omezený rámec tohoto kurzu (detaily je možno najít v doporučené rozšiřující literatuře)

Axiomatika KPL

Axiomy KPL

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
4. $(\forall x)\varphi \to \varphi[t/x]$, je-li t substituovatelný za x ve φ
5. $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$, není-li x volná ve φ

Odvozovací pravidla KPL

1. z φ a $\varphi \to \psi$ lze odvodit ψ
2. z φ lze odvodit $(\forall x)\varphi$

Věta o úplnosti

Dokazatelnost

Pojmy důkazu a dokazatelnosti v uvedeném axiomatickém systému jsou definovány obdobně jako ve výrokové logice

Věta (slabá o úplnosti)

Formule φ je tautologií KPL, právě když je dokazatelná v uvedeném axiomatickém systému