Cvičení LOTEM 2018/2019

(Průběžně doplňováno během semestru; verze ke dni 27. dubna 2019.)

§1.1 Vybrané prerekvizity

1. Zápisy pomocí logických symbolů vyjádřete v přirozeném jazyce. Která tvrzení uvedené zápisy vyjadřují? Která z nich jsou pravdivá? (Symbol $|$ mezi dvěma výrazy značí dělitelnost, $\parallel$ rovnoběžnost, $\perp$ kolmost. Oborem proměnných a, b, c, m, n jsou zde kladná celá čísla, ε, x, x_n označují reálná čísla, p, q, r přímky v rovině.)

   a) $(\forall n)\big(n > 2 \to \neg(\exists a, b, c)(a^n + b^n = c^n)\big)$

   b) $n > 1 \;\&\; (\forall m)(m \,|\, n \to m = 1 \vee m = n)$

   c) $(\forall \varepsilon)\big(\varepsilon > 0 \to (\exists m)(\forall n)(n \geq m \to |x_n - x| < \varepsilon)\big)$

   d) $(\forall p, q, r)(p \perp q \;\&\; q \perp r \to p \parallel r)$

   e) $(\exists x)(x^2 + 1 = 0)$

   f) $(\exists x)(x \geq 0 \;\&\; x^2 = 2)$

2. Zapište tvrzení pomocí logických symbolů. (Pamatujte: aby bylo možné logické symboly použít, je často třeba tvrzení vhodným způsobem ekvivalentně přeformulovat. Pro celá čísla použijte proměnné $x, y, \dots$, pro přímky $p, q, \dots$)

   a) Mocnina každého celého čísla je nezáporná.

   b) Žádné dvě kolmé přímky nejsou rovnoběžné.

   c) Existují dvě různá celá čísla, jejichž druhá mocnina je 1.

   d) Pro nejvýše jedno x platí, že $2x = 4$.

   e) Existuje právě jedno x takové, že $2x = 4$.

§1.2 Množiny a jejich prvky

1. a) Může jeden komprehenzní term označovat dvě různé množiny?
   b) Mohou dva různé komprehenzní termy označovat tutéž množinu?

2. a) Může nastat $\{a, b\} = \{a\}$? (Pokud ne, proč? Pokud ano, kdy?)
   b) Totéž pro $\{a, b, c\} = \{a, b\}$.

3. Určete: $[0, 1] \cup [1, 2]$, $[0, 1] \cap [1, 2]$, $[0, 1] \setminus [1, 2]$.

§2.1–2.2: Galileův paradox, spočetné a nespočetné množiny

1. Dokažte množinové ekvivalence:

   a) $\mathbb{N} \approx \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$
   b) $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \setminus \{0\}$
   c) $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \cup \{-1\}$
   d) $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$
   e) $\mathbb{N} \approx \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je prvočíslo}\}$

2. Dokažte množinové ekvivalence:

   a) $\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   b) $[0,1] \approx [2,6]$; obecně, $[a,b] \approx [c,d]$ pro $a < b$ a $c < d$.
   c) $[0,1] \approx [0,1) \approx (0,1)$
   d) $(-1,1) \approx \mathbb{R} \approx (0,+\infty)$

3. Další úlohy budou doplněny později.

§2.3–2.7

Úlohy ze cvičení k těmto kapitolám budou doplněny později.

§2.9 Kardinální čísla

1. Vypočítejte:

   (a) $(\aleph_0 + 1)^2$, $\quad 2^{\aleph_0+1}$, $\quad \aleph_0 + \mathfrak{c} + \beth_2$, $\quad 2^{(\aleph_0+\mathfrak{c})\cdot\aleph_0+1}$
   (b) $(65535 + \mathfrak{c})^{32767+8191}$, $\quad \big((2\cdot\aleph_0 + 1) + \mathfrak{c}^4 \cdot (\beth_0 + \aleph_0)\big)^3 \cdot (\beth_2 + 1)^{2^{178}}$
   (c) $\beth_k \cdot (\beth_m + \beth_n) \quad$ pro $k, m, n \in \mathbb{N}$
   (d) $m\mathfrak{c}^2 \quad$ pro $m \in \mathbb{N}$

2. Seřaďte podle velikosti:

   (a) 2^1, 2^2, $2^{\aleph_0}$, $2^{\mathfrak{c}}$, $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ $\mathfrak{c}^0$, $\mathfrak{c}^1$, $\mathfrak{c}^2$
   (b) $(2+\aleph_0)^2$, $2^{\aleph_0} + \aleph_0^2$, $\mathfrak{c}^2 + 2^{\mathfrak{c}}$, $\beth_4$, $2^{\beth_2}$

3. Slovní úlohy:

   (a) V Hilbertově hotelu[1] je $\aleph_0$ jednolůžkových pokojů. Hotel je plně obsazen.
      i. Přijede další host. Lze jej, při vhodném přestěhování některých stávajících hostů do jiných pokojů, ubytovat?
      ii. Autobus přiveze dalších $\aleph_0$ hostů. Lze je, při vhodném přestěhování některých stávajících hostů do jiných pokojů, všechny ubytovat?

[1] Úloha je klasická, s termínem *Hilbertův hotel* (jakožto názvem příslušného argumentu o spočetných mohutnostech) se lze setkat i v odborné literatuře.

iii. Přijede $\aleph_0$ autobusů a každý přiveze $\aleph_0$ hostů. Lze je, při vhodném přestěhování některých stávajících hostů do jiných pokojů, všechny ubytovat?

(b) Petr se rád sází o nekonečné částky.

i. Petr má 200 korun. Vsadí se s Janem o jeho $\aleph_0$ korun oproti svým 200 korunám a sázku vyhraje. Kolik korun bude mít?

ii. Petr má nyní $\aleph_0$ Kč. Vyhraje sázku s Frantou a Zdeňkem a od každého z nich dostane $\mathfrak{c}$ korun. Kolik korun bude mít?

iii. S $\beth_1$ korunami v kapse se Petr vypraví do kasina proslulého Hilbertova hotelu, kde vyhraje proti každému z hostů hru o $\beth_1$ korun. Jak moc si finančně polepší?

(c) Jiří si, na rozdíl od Petra, vydělává peníze poctivou prací na brigádách.

i. V pondělí očesal celý sad s konečně mnoha speciálně vyšlechtěnými jabloněmi, z nichž každá nesla $\aleph_0$ jablek. Za každé sklizené jablko dostal 2 koruny. Kolik si vydělal peněz?

ii. V úterý Jiří v matematickém supermarketu označoval množiny přirozených čísel cenovými štítky. Během své pracovní doby zvládl označit štítkem každou množinu přirozených čísel. Za umístění každého štítku dostal podle smlouvy 10 haléřů. Kolik si vydělal korun?

iii. Ve středu Petr Jiřího přemluvil k sázce o $\mathfrak{c}$ korun. Jiří sázku přijal a prohrál. Jak má Petra vyplatit, aby mu zůstalo co největší množství jeho těžce vydělaných peněz?

4. (a) Plodivé skřítky definujeme jako takové skřítky, že každá množina plodivých skřítků plodí nového plodivého skřítka, různého od všech ostatních.

i. Dokažte, že existuje alespoň jeden plodivý skřítek.

ii. Dokažte, že třída všech plodivých skřítků je vlastní.

iii. Zamyslete se, jak je možné, že z pouhé matematické definice vyplývá *existence* něčeho tak absurdního jako plodivých skřítků.
(Tip: uvažte, zda matematická existence plodivých skřítků má nějaké pozorovatelné důsledky v realitě a zda námi zvolený název „skřítci“ pro tento druh matematických objektů vypovídá něco o jejich definicí zaručených vlastnostech.)

(b) V Zelazného sérii fantasy knih *Kroniky Amberu* existuje jediný pravý svět Amber, který vrhá bezpočet „stínů“ (možných světů). Dworkin z Amberu studiem Vzoru zjistil, že ke každé množině stínů existuje nějaký stín, který se od nich všech liší. Zdůvodněte, že tudíž existuje vlastní třída stínů.

§3. Ordinální čísla a dobrá uspořádání

1. Určete, které z těchto množin reálných čísel jsou dobře uspořádané (v uspořádání reálných čísel podle velikosti):

(a) $\{0, 1, \sqrt{2}, e, \pi\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\emptyset$

(b) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\{1 - 10^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{1 - 10^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2, 4, 6\}$

   (d) $\{m - 10^{-n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
   (e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, Cantorovo diskontinuum $\mathbb{D}$

2. Pro dobře uspořádané množiny z předchozího cvičení: (i) očíslujte jejich prvky vzestupně po řadě ordinálními čísly a (ii) určete typ dobrého uspořádání těchto množin.

3. Vypočítejte:
   (a) $\omega + 2 + \omega + 1$, $\omega + 6^{78} + \omega \cdot 2 + 9$
   (b) $5 \cdot (\omega + 1)$, $(\omega + 1) \cdot 5$
   (c) $\omega \cdot (\omega + 1)$, $(\omega + 1) \cdot \omega$

4. Seřaďte podle velikosti:
   (a) ordinály $\omega + 3$, $3 \cdot \omega$, $28 \cdot 3 \cdot 20^{19}$, $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega^2 + 1$, $\omega + \omega^2$
   (b) kardinály $\beth_{\omega+1}$, $\beth_\omega + 1$, $\beth_{\omega^2}$, ${\beth_\omega}^2$, 42, $\aleph_0$, $2^{\mathfrak{c}}$, $\aleph_1$

5. Slovní úlohy:
   (a) Na přeboru Cantorova ráje[2] se Jana umístila třetí a Petra na $\omega+3$. místě za Janou. Kolikátá se umístila Petra?
   (b) V téže soutěži skončila Jindra na $\omega^2 + \omega + 3$. místě.
      i. *Kolik* účastnic se umístilo mezi Petrou a Jindrou?
      ii. *Kolikátá* byla Jindra za Petrou? A za Janou?
   (c) Na $\omega + 10$. pandimenzionálním všesokolském sletu cvičenci na počest jeho kulatého výročí utvořili na Nekonečném stadionu čtverec s $\omega + 10$ řadami a $\omega + 10$ sloupci. První cvičenec z první řady stál přímo před Branou borců, kterou poté cvičenci začali po jednotlivých řadách odcházet. Kolikátý odešel Branou borců poslední cvičenec?

[2] *Cantorův ráj* je často užívané poetické označení hierarchie nekonečen v Cantorově teorii množin. Pochází od Hilberta, jenž roku 1926 v polemice s intuicionisty (kteří chtěli některé nekonečné konstrukce z matematiky vylučovat) napsal: „Nikdo nás nemůže vyhnat z ráje, který pro nás stvořil Cantor.“

Klíč ke cvičením

§1.1 Vybrané prerekvizity

1. (a) Pro každé n platí, že jestliže $n > 2$, pak není pravda, že existují a, b, c taková, že $a^n + b^n = c^n$. Stručněji: Pro žádné $n > 2$ neexistují a, b, c, že $a^n + b^n = c^n$. Zápis vyjadřuje Velkou Fermatovu větu, tedy pravdivé tvrzení (dokázána A. Wilesem v r. 1994). Všimněte si: v češtině a slovenštině je třeba univerzální kvantifikaci záporného slovesa vyjádřit záporným zájmenem („žádný“ apod.), jinak věta není jednoznačná (ani gramaticky správná).

   (b) Zápis vyjadřuje, že n je prvočíslo. Jeho pravdivost tudíž závisí na hodnotě n. (Říkáme, že proměnná n je zde *volná* – není *vázaná* žádným kvantifikátorem, proto pravdivost tvrzení může záviset na její hodnotě.)

   (c) $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Podmínky kvantifikace lze pro stručnost psát přímo ke kvantifikátoru: $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists m)(\forall n \geq m)\big(|x_n - x| < \varepsilon\big)$.

   (d) Tvrzení je ekvivalentní Eukleidovu postulátu o rovnoběžkách; v eukleidovské geometrii tedy platí. (V neeukleidovských však nikoli; uvědomte si: pravdivost matematického tvrzení může záviset na teorii, tj. na použitých předpokladech/axiomech.)

   (e) Existence $\sqrt{-1}$. Protože obor proměnné x byl zadáním určen jako reálná čísla, je tvrzení nepravdivé – žádná reálná hodnota x nesplňuje $x^2 + 1 = 0$. (Všimněte si: v oboru komplexnich čísel by tvrzení bylo pravdivé; pravdivost tvrzení obecně závisí na oboru proměnných, proto je třeba jej specifikovat!)

   (f) Existence $+\sqrt{2}$, v reálných číslech pravdivá (pro x racionální by byla nepravdivá). Lze psát stručněji $(\exists x \geq 0)(x^2 = 2)$.

2. (a) $(\forall x)(x^2 \geq 0)$

   (b) $(\forall p, q)\big(p \perp q \rightarrow \neg(p \parallel q)\big)$, popř. $\neg(\exists p, q)(p \perp q \;\&\; p \parallel q)$ npod.

   (c) $(\exists x, y)(x \neq y \;\&\; x^2 = 1 \;\&\; y^2 = 1)$

   (d) $(\forall x, y)(2x = 4 \;\&\; 2y = 4 \rightarrow x = y)$, popř. $\neg(\exists x, y)(2x = 4 \;\&\; 2y = 4 \;\&\; x \neq y)$ npod.

   (e) $(\exists x)\big(2x = 4 \;\&\; (\forall y)(2y = 4 \rightarrow x = y)\big)$. Stručněji se kvantifikace „existuje jediné x“ často zapisuje $(\exists! x)$. Tvrzení (e) pak lze psát: $(\exists! x)(2x = 4)$.

§1.2 Pojem množiny

1. (a) Ne – podmínka v komprehenzním termu jednoznačně vymezuje prvky jím označované množiny, a dle principu extenzionality je množina svými prvky jednoznačně určena. (b) Ano, např. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 \leq 1\}$.

2. (a) Ano, právě když $a = b$. Důkaz: Pokud $a = b$, pak $\{a, b\} = \{a, a\} = \{a\}$. Obráceně, pokud $\{a, b\} = \{a\}$, musí být $b \in \{a\}$, tedy $a = b$. (b) Ano, právě když $c = a \vee c = b$. (Dokažte sami.)

3. $[0, 2]$, $\{1\}$, $[0, 1)$. (Pozor: druhý výsledek je množina $\{1\}$, nikoli číslo 1.)

§2.1–2.2 Galileův paradox, spočetné a nespočetné množiny

1. Najdeme příslušné bijekce, např. tyto: (1a) přiřazení $n \mapsto n^2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$; (1b) $n \mapsto n+1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$; (1c) $n \mapsto n - 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$; (1d) $2n \mapsto n$ a $2n + 1 \mapsto -(n + 1)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$; (1e) každému $n \in \mathbb{N}$ přiřadíme $(n + 1)$-ní prvočíslo podle velikosti. (Podrobněji: z Eukleidova důkazu víme, že prvočísel je nekonečně mnoho; tedy pokud p_n je n-té prvočíslo, pak existuje nejblíže vyšší prvočíslo, které označíme p_{n+1}; přiřazení $n \mapsto p_{n+1}$ je hledaná bijekce).

2. Hledané bijekce jsou např. tyto: (2a) $f(x) = x + 1$ pro $x \in \mathbb{N}$ a $f(x) = x$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; (2b) $f(x) = 4x + 2$ pro $x \in [0, 1]$; obecně $f(x) = c + (d - c)(x - a)/(b - a)$ pro $x \in [a, b]$; (2c) $f(x) = x/2$, pokud $x = 1/2^n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, a $f(x) = x$ jinak (druhá ekvivalence obdobně); (2d) první ekvivalence $f(x) = \mathrm{tg}(2x/\pi)$, druhá $f(x) = \mathrm{e}^x$.