Sémantika výrokové logiky

Logika a teorie množin LS 2012/13, přednáška 4–7

Libor Běhounek

www.cs.cas.cz/behounek/teaching/lotem12

PřF OU, 4.–25. 3. 2013

Osnova

Osnova

Pravdivostní hodnoty

Stipulace

V *klasické* výrokové logice uvažujeme pouze výroky, které jsou BUĎTO pravdivé, NEBO nepravdivé

Těmto pravdivostním stavům říkáme pravdivostní hodnoty a označujeme je 1 (pravda) a 0 (nepravda)

Protože jsou právě dvě, říkáme, že klasická logika je dvojhodnotová

Závisí-li pravdivost výroku na místě, čase či okolnostech, musíme je upřesnit, aby byla pravdivostní hodnota určena

Dvojhodnotovost

Caveat

Dvojhodnotovostí poněkud omezujeme studovaný soubor výroků

Vylučujeme mj. výroky s nejasnou, neostrou či neurčenou pravdivostí:

- o vágních vlastnostech,
- o budoucnosti či vzdáleném vesmíru,
- o nekonečnu,
- o paradoxních pojmech a neexistujících věcech, ...

Takové výroky buďto nepřipouštíme, nebo se tváříme, že mají jednu ze dvou pravdivostních hodnot

Dvojhodnotovost v matematice

V (klasické) matematice omezení na dvojhodnotovost příliš nevadí: obvykle studované matematické vlastnosti takové jsou

Výroky, které se do tohoto schématu nevejdou, motivují neklasické logiky (a na nich založenou neklasickou matematiku):

- Konstruktivní přístup k nekonečnu: intuicionistická logika
- Vágní pojmy: fuzzy logika
- Paradoxní pojmy: parakonsistentní logika

V tomto kurzu se budeme zabývat pouze klasickou, dvojhodnotovou logikou

Osnova

Význam negace

Stipulace: význam negace

Negace $\neg A$ výroku A je pravdivá, pokud je výrok A nepravdivý; jinak je nepravdivá

Pozor: toto není *popis* významu negace (deskripce), nýbrž jeho *stipulativní definice* (preskripce): význam negace takto *definujeme*

Pozorování

Pravdivostní hodnota negace závisí pouze na pravdivostní hodnotě negovaného výroku.

Říkáme, že výroková spojka negace je extenzionální (angl. truth-functional)

Pravdivostní tabulka negace

Pravdivostní tabulka negace

Definici významu negace lze shrnout v tabulce pojednávající jednotlivé případy pravdivosti A:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Takovýmto tabulkám říkáme pravdivostní tabulky výrokových spojek

Pozorování

Významem negace je funkce $F_{\neg}\colon \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, zachycená uvedenou pravdivostní tabulkou

Vyjádření negace v přirozeném jazyce

Vyjádření negace v přirozeném jazyce

V přirozeném jazyce negaci obvykle vyjadřujeme vazbami „není pravda, že“, předponou „ne-“ apod.

Pozor:

Matematický (logický, formální) význam negace nicméně není určen tímto slovním zněním, nýbrž již uvedenou definicí

Definice

Negací výroku A je výrok $\neg A$ (což *čteme* „není pravda, že A“, v takto dohodnutém technickém významu této fráze), jehož pravdivost je funkcí $F_{\neg}$ pravdivosti výroku A

Formalizace výroků přirozeného jazyka

Formalizace výroků přirozeného jazyka

Často se střetáváme s inverzní úlohou: najít logickou strukturu výroku v přirozeném jazyce (výrok formalizovat)

Pozor:

Formalizace výroků přirozeného jazyka nemusí být jasná a jednoznačná

Příklad

Ne každou zápornou slovní vazbu lze adekvátně formalizovat negací:

Dvojitá negace $\neg\neg A$ má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok A.
ALE: u záporných vazeb v přirozeném jazyce tomu tak být nemusí

Význam konjunkce

Stipulace: význam konjunkce

Konjunkce $A \wedge B$ výroků A, B je pravdivá, pokud jsou oba výroky A, B pravdivé; jinak je nepravdivá

Pozorování

Pravdivostní hodnota konjunkce závisí pouze na pravdivostních hodnotách konjunktů, tj. konjunkce je rovněž extenzionální

Pravdivostní tabulka konjunkce

Pravdivostní tabulka konjunkce

Definici významu konjunkce lze shrnout touto pravdivostní tabulkou:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

či kompaktněji:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Pozorování

Významem konjunkce je binární funkce $F_\wedge \colon \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, zachycená uvedenou pravdivostní tabulkou

Říkáme, že $\wedge$ je binární výroková spojka (zatímco $\neg$ je unární)

Vyjádření konjunkce v přirozeném jazyce

Vyjádření konjunkce v přirozeném jazyce

V přirozeném jazyce konjunkci obvykle vyjadřujeme spojkami „a“, „i“, vazbou „jak . . . , tak . . . “ apod.

Opět pozor:

Matematický (logický, formální) význam konjunkce nicméně není určen tímto slovním zněním, nýbrž již uvedenou definicí

Příklad

Ne každou konjunktivní slovní vazbu lze adekvátně formalizovat konjunkcí:

Např. $A \wedge B$ má vždy stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok $B \wedge A$. ALE: v přiroz. jazyce „a“ často znamená časovou následnost apod.

Význam disjunkce

Stipulace: význam disjunkce

Disjunkce $A \vee B$ výroků A, B je pravdivá, pokud je alespoň jeden z výroků A, B pravdivý; jinak je nepravdivá

Pravdivostní tabulka disjunkce

Disjunkce je rovněž extenzionální binární spojkou, s touto pravdivostní tabulkou:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Vyjádření disjunkce v přirozeném jazyce

V přirozeném jazyce disjunkci obvykle vyjadřujeme spojkami „nebo“, „či“ apod. (s podobnými výhradami jako u $\neg$, $\wedge$)

Vylučovací disjunkce

Pozorování

Definovaný význam $\vee$ odpovídá nevylučovacímu „nebo“: disjunkce je pravdivá, i pokud jsou *oba* disjunkty pravdivé

Vylučovací disjunkce

Vylučovacímu „nebo“ odpovídá výroková spojka (značená někdy $\underline{\vee}$ či XOR a zvaná vylučovací disjunkce či non-ekvivalence) s touto pravdivostní tabulkou:

$\underline{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	0

V přirozeném jazyce je vylučovací disjunkce obvykle vyjadřována vazbami „buď *A*, (a)nebo *B*“, „*A*, nebo *B*“ (s čárkou) apod.

Význam implikace

Stipulace: význam implikace

Implikace $A \rightarrow B$ je nepravdivá, pokud je výrok A pravdivý a výrok B nepravdivý; jinak je pravdivá

Pravdivostní tabulka implikace

Implikace je extenzionální binární spojkou s pravdivostní tabulkou:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

tj.:

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

A nazýváme antecedentem a B konsekventem implikace $A \rightarrow B$

Vyjádření implikace v přirozeném jazyce

Vyjádření implikace v přirozeném jazyce

V přirozeném jazyce implikaci obvykle vyjadřujeme vazbami:

- „jestliže *A*, pak *B*“, „pokud *A*, pak *B*“, „když *A*, tak *B*“,
- „*B*, jestliže *A*“, „*B*, pokud *A*“, „*B*, když *A*“, „*B* tehdy, když *A*“,
- „*A*, jen když *B*“, apod.

Pozor na směr implikace u spojek „jestliže“, „pokud“, „když“!

Materiální implikace

Pozor

Význam implikace (v logice a matematice) je vysoce technický, a velmi málo odpovídá vazbě „jestliže–pak“ přirozeného jazyka:

Pozorování

- Implikace je vždy pravdivá, je-li antecedent nepravdivý
- Implikace je vždy pravdivá, je-li konsekvent pravdivý
- Mezi antecedentem a konsekventem nemusí být žádný (kauzální, důvodový, nutnostní aj.) vztah, aby byla implikace pravdivá: záleží pouze na jejich pravdivostních hodnotách

Říkáme, že jde o tzv. materiální implikaci.

Jinými implikacemi (např. striktní = nutnou) se klasická výroková logika nezabývá (zkoumají se např. v modální logice)

Význam ekvivalence

Stipulace: význam ekvivalence

Ekvivalence $A \leftrightarrow B$ výroků je pravdivá, pokud mají výroky A, B stejnou pravdivostní hodnotu; jinak je nepravdivá

Pravdivostní tabulka ekvivalence

Ekvivalence je extenzionální binární spojkou s pravdivostní tabulkou:

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Vyjádření ekvivalence v přirozeném jazyce

Vyjádření ekvivalence v přirozeném jazyce

V přirozeném jazyce ekvivalenci obvykle vyjadřujeme vazbami: „*A*, právě když *B*“, „*A*, když a jen když *B*“, „*A* tehdy a jen tehdy, když *B*“ atp. (V angl. zkracováno umělou spojkou iff, za „if and only if“)

Pozor

Rovněž význam ekvivalence (v logice a matematice) je vysoce technický: opět mezi *A* a *B* nemusí být žádný vztah, záleží pouze na jejich pravdivostních hodnotách (jde o materiální ekvivalenci).

Pozor

Pozor na rozdíl mezi $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$ a $A \leftrightarrow B$
(„Když *A*, pak *B*“, „*A*, když *B*“ a „*A*, právě když *B*“)

Neextenzionální výrokové spojky

Pozorování

Všechny dosud uvedené výrokové spojky jsou extenzionální.

Příklad neextenzionální spojky

Spojka $\Box A$ „nutně A“ není extenzionální: její pravdivostní hodnota není funkcí pravdivostní hodnoty A

Klasická výroková logika se zabývá pouze extenzionálními výrokovými spojkami.

Neextenzionální spojky (jako „nutně“, „možná“ apod.) se zkoumají v rozšířeních výrokové logiky (např. v tzv. modálních logikách)

Ternární výrokové spojky

Pozorování

Všechny dosavadní spojky byly nejvýše binární.

Příklad ternární spojky

Smysluplný příklad ternární spojky je $A ? B : C$, „jestliže A, pak B, jinak C“, s pravdivostní tabulkou:

A	B	C	$A ? B : C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Osnova

Složené a atomické výroky

Pravdivostní hodnoty složených výroků

Rekurzivní aplikací pravdivostních tabulek výrokových spojek dokážeme určit pravdivostní hodnotu libovolného složeného výroku,

tj. výroku poskládaného pomocí uvedených (extenzionálních) výrokových spojek z atomických výroků,

tj. výroků pomocí výrokových spojek dále neanalyzova(tel)ných

Upozornění

Pravdivostní tabulky základních výrokových spojek ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) bude třeba znát zpaměti.

Formule výrokové logiky

Značení

Atomické výroky značíme výrokovými proměnnými $p, q, r, \ldots$
Složené výroky zapisujeme formulemi výrokové logiky, vyznačujícími aplikaci výrokových spojek na atomické výroky
Pořadí aplikace výrokových spojek vyznačujeme závorkami
Pro ušetření závorek má přednost: $\neg$ před $\wedge$, $\vee$, a ty před $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Příklad

Formule $(p \wedge q) \rightarrow \neg q$ vyjadřuje implikaci mezi konjunkcí atomických výroků p a q a negací atomického výroku q. V přirozeném jazyce bychom tento výrok vyjádřili: „jestliže p a q, pak není pravda, že q“.

Všimněte si, že v přirozeném jazyce nemáme k dispozici závorky. Pokud prioritu operací nevyjádříme opisem, dojde k víceznačnosti.
„p a q nebo r“ … $p \wedge (q \vee r)$ vs. $(p \wedge q) \vee r$.

Pravdivostní hodnoty složených výroků

Příklad

Mějme pravdivý atomický výrok p a nepravdivý atomický výrok q. Pravdivostní hodnotu výroku $(p \wedge q) \rightarrow \neg q$ určíme podle pravdivostních tabulek takto:

1. Výrok $p \wedge q$ má pravdivostní hodnotu $1 \wedge 0 = 0$
2. Výrok $\neg q$ má pravdivostní hodnotu $\neg 0 = 1$ (správněji: $F_{\neg}(0) = 1$)
3. Tedy výrok $(p \wedge q) \rightarrow \neg q$ má pravdivostní hodnotu $(1 \wedge 0) \rightarrow (\neg 0) = 0 \rightarrow 1 = 1$

Kompaktní zápis a výpočet

Kompaktněji lze výpočet pravdivostní hodnoty provést takto:

$$\begin{array}{cccccccc} (& p & \wedge & q &) & \rightarrow & \neg & q \\ & 1 & 0 & 0 & & \color{red}{1} & 1 & 0 \end{array}$$

Pravdivostní hodnota atomických výroků

Pozorování

Jediné, co k určení pravdivostní hodnoty složeného výroku potřebujeme vědět, jsou pravdivostní hodnoty atomických výroků

Upozornění

Tím, jaké jsou pravdivostní hodnoty atomických výroků, se logika *nezabývá.*

To je starostí empirických věd (u empirických výroků), přijatých definic (u analytických výroků) apod.

Pravdivostní hodnoty atomických výroků považuje logika za *dané.*

Pravdivostní hodnoty výrokových proměnných

Obecnější pohled

Výroková logika se ani nestará, který konkrétní atomický výrok výroková proměnná zastupuje

Proč?

Pro pravdivostní hodnotu složeného výroku záleží *pouze* na pravdivostních hodnotách atomických výroků; nikoli na tom, jaké konkrétní výroky to jsou.
(Vzpomeňte: spojky klasické výrokové logiky jsou extenzionální)

Záleží tedy pouze na přiřazení pravdivostních hodnot výrokovým proměnným

Ohodnocení výrokových proměnných

Definice

Ohodnocením výrokových proměnných (krátce: ohodnocením) rozumíme přiřazení pravdivostních hodnot (0 či 1) všem výrokovým proměnným $(p, q, r, \ldots)$.

Tj. zobrazení $e\colon \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$, kde Var je množina všech výrokových proměnných (obvykle nekonečná spočetná)

Výroková logika se zabývá:

1. Pravdivostními hodnotami výroků při *daném* ohodnocení
2. Zákonitostmi platnými při *libovolném* ohodnocení

Na toto rozlišení budeme neustále narážet. Je třeba obě situace nezaměňovat.

Ohodnocení formulí klasické výrokové logiky

Věta

Ohodnocení výrokových proměnných jednoznačně určuje pravdivostní hodnoty všech formulí výrokové logiky.

Důkaz

Indukcí podle stavby formule, s využitím faktu, že všechny spojky klasické výrokové logiky jsou extenzionální.
(Detaily nudné a triviální, vynecháme. Tvrzení je v podstatě zřejmé.)

Značení

Pravdivostní hodnotu formule φ při ohodnocení e budeme značit $\|\varphi\|_e$.
(V literatuře často značeno prostě $e(\varphi)$.)

Tarského podmínky pravdivosti

Tarského podmínky

Pravdivostní hodnoty výroků při ohodnocení e splňují tyto rekurzivní podmínky (pomocí nichž je počítáme), zvané Tarského podmínky pravdivosti:

$$
\begin{aligned}
\|\neg\varphi\|_e &= F_\neg(\|\varphi\|_e) \\
\|\varphi \wedge \psi\|_e &= F_\wedge(\|\varphi\|_e, \|\psi\|_e) \\
\|\varphi \vee \psi\|_e &= F_\vee(\|\varphi\|_e, \|\psi\|_e) \\
\|\varphi \rightarrow \psi\|_e &= F_\rightarrow(\|\varphi\|_e, \|\psi\|_e) \\
\|\varphi \leftrightarrow \psi\|_e &= F_\leftrightarrow(\|\varphi\|_e, \|\psi\|_e) \\
\|p\|_e &= e(p)
\end{aligned}
$$

kde p je libovolná výroková proměnná, φ, ψ jsou libovolné výrokové formule a $F_\neg, F_\wedge, F_\vee, F_\rightarrow, F_\leftrightarrow$ jsou pravdivostní funkce spojek $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$,

Pravdivostní funkce formulí

Věta

Pravdivostní hodnota formule závisí jen na výrokových proměnných v ní obsažených.

Důkaz

Indukcí podle stavby formule. (Tvrzení je v podstatě zřejmé, detailní důkaz nudný a triviální, rovněž vynecháme.)

Důsledek

Nejen výrokové spojky, ale i všechny formule výrokové logiky mají své pravdivostní tabulky, přiřazující pravdivostním hodnotám v nich vystupujících výrokových proměnných pravdivostní hodnotu celé formule.

Výpočet pravdivostní funkce formule

Příklad

Pravdivostní tabulku formule $(p \wedge q) \rightarrow \neg q$ vypočítáme postupně („po podformulích“) takto:

p	q	$p \wedge q$	$\neg q$	$(p \wedge q) \rightarrow \neg q$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Kompaktnější zápis a výpočet (zvl. u delších formulí):

p	q	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$\neg$	q
0	0		0		1	1	
0	1		0		1	0	
1	0		0		1	1	
1	1		1		0	0	

Pravdivostní funkce formulí

Jinak řečeno

Každá formule φ klasické výrokové logiky má svou pravdivostní funkci $F_\varphi\colon\{0,1\}^{\mathrm{Var}(\varphi)} \to \{0,1\}$, kde $\mathrm{Var}(\varphi) \subseteq \mathrm{Var}$ je množina výrokových proměnných vyskytujících se ve φ

Protože klasické výrokové logice záleží pouze na pravdivostních hodnotách výroků, lze (v jejím rámci) funkci F_φ chápat jako význam formule φ klasické výrokové logiky

Osnova

Logicky ekvivalentní formule

Pozorování

Všimněte si: formule $\neg((p \wedge q) \rightarrow \neg q)$ má stejnou pravdivostní tabulku jako konjunkce $p \wedge q$

Idea

Protože významem formule v klasické výrokové logice je její pravdivostní funkce (tabulka), mají výrokové formule se stejnou pravdivostní funkcí týž význam.
Budeme říkat, že jsou (logicky) ekvivalentní a psát $\varphi \equiv \psi$

Příklad

Formule $\neg((p \wedge q) \rightarrow \neg q)$ a $p \wedge q$ jsou logicky ekvivalentní,
$\neg((p \wedge q) \rightarrow \neg q) \equiv p \wedge q$

Logická ekvivalence výroků

Definice

Formule φ, ψ klasické výrokové logiky jsou logicky ekvivalentní, mají-li při všech ohodnoceních stejnou pravdivostní hodnotu (přičemž záleží jen na ohodnocení výrok. proměnných v nich vystupujících)

Značení: $\varphi \equiv \psi$

Jsou-li formule φ, ψ logicky ekvivalentní, pak i o výrocích reprezentovaných těmito formulemi říkáme, že jsou logicky ekvivalentní

Příklad

Výroky „Jestliže 5 je liché číslo, pak 5^2 je liché číslo“ a „Jestliže 5^2 není liché číslo, pak 5 není liché číslo“ jsou logicky ekvivalentní. (Ověřte.)

Ekvivalence vs. ekvivalence

Distinguo

- Ekvivalence (spojka) mezi výroky, $A \leftrightarrow B$
  = stejná pravdivost *při daném ohodnocení*
- (Logická) ekvivalence výroků, $A \equiv B$
  = stejná pravdivost *při všech ohodnoceních*

Příklad

- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$ je formule/výrok
  (v některých ohodnoceních pravdivý a v jiných nepravdivý)
- $(p \rightarrow q) \equiv (q \rightarrow p)$ je tvrzení o vztahu dvou formulí/výroků
  (nepravdivé)

Obojí spolu úzce souvisí (uvidíme jak), jde ale o rozdílné věci

K čemu je logická ekvivalence

Logicky ekvivalentní výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu, ať už je pravdivost atomických výroků v nich vystupujících jakákoli

Je-li tedy výrok A pravdivý, a víme-li, že výrok B je s ním logicky ekvivalentní, pak víme, že i výrok B je pravdivý.

Toho lze využít např. v (matematických) důkazech

Příklad

$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ (ověřte!).
K důkazu pravdivosti výroku $A \rightarrow B$ tedy stačí dokázat pravdivost výroku $\neg B \rightarrow \neg A$ (což je někdy jednodušší).
Této metodě důkazu se v matematice říká důkaz nepřímý
Více o metodách důkazu později (u pojmu logického *důsledku*)

Rozhodnutelnost logické ekvivalence

Pozorování

Logickou ekvivalenci výrokových formulí v klasické výrokové logice umíme mechanicky rozhodnout (vypočtením a porovnáním pravdivostních tabulek)

Věta: Logická ekvivalence výrokových formulí v klasické výrokové logice je algoritmicky rozhodnutelný problém

Může to ale být hodně pracné (pravdivostní tabulka formule s n výrokovými proměnnými má 2^n řádků)

(Věta: Logické ekvivalence v klasické výrokové logice je coNP-úplný problém)

Proto je užitečné znát nejčastěji používané logické ekvivalence a umět pomocí nich logicky ekvivalentní výroky *odvozovat*

Vlastnosti logické ekvivalence

Pozorování

Logická ekvivalence výroků má (mj.) tyto vlastnosti (zdůvodněte!):

- $\varphi \equiv \varphi$ (reflexivita)
- je-li $\varphi \equiv \psi$, pak také $\psi \equiv \varphi$ (symetrie)
- je-li $\varphi \equiv \psi$ a $\psi \equiv \chi$, pak $\varphi \equiv \chi$ (tranzitivita)

Tj. $\equiv$ je *relací ekvivalence* na formulích (a indukuje *rozklad* množiny všech výrokových formulí na vzájemně disjunktní třídy logicky ekvivalentních formulí)

Díky tranzitivitě můžeme psát $\varphi \equiv \psi \equiv \chi \equiv \ldots$ a odvozovat logickou ekvivalenci formulí v postupných krocích

Věta o substituci

Věta (o substituci)

Nechť ψ je podformulí formule φ a nechť $\psi \equiv \psi'$. Nechť φ' je formule vytvořená z φ nahrazením některých (nebo všech) výskytů podformule ψ ve φ formulí ψ'. Pak $\varphi \equiv \varphi'$

Kompaktněji: Pokud $\psi \equiv \psi'$, pak $\varphi[\psi] \equiv \varphi[\psi']$ (či: $\varphi \equiv \varphi[\psi'/\psi]$)

Ve formulích tedy můžeme volně nahrazovat ekvivalentní podformule

Je nutno vyjasnit pojem podformule = úkol syntaxe výrokové logiky (odložíme do výkladu syntaxe, zatím je intuitivně zřejmý)

Důkaz věty o substituci

Zdůvodněte sami (na základě extenzionality, pomocí pravdivostních tabulek zúčastněných formulí)

Důležité případy logické ekvivalence

Pozorování

Platí následující logické ekvivalence (všechny ověřte):

- $A \equiv A \wedge A \equiv A \vee A \equiv \neg\neg A \equiv \neg A \rightarrow A$
- $A \wedge B \equiv B \wedge A, \quad A \vee B \equiv B \vee A$ (komutativita $\wedge$, $\vee$)
- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
  (asociativita $\wedge$, $\vee$ – můžeme vynechávat závorky)
- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  (distributivita $\wedge$ a $\vee$ – vzájemná)
- $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
  (De Morganovy zákony)
- $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ (kontrapozice)
- $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv A \wedge B \rightarrow C$ (reziduace)

Vzájemná definovatelnost spojek

Pozorování

Platí následující logické ekvivalence (všechny ověřte):

- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

V důsledku toho platí např. také (rovněž ověřte):

- $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
- $A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$
- $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Osnova

Kolik je třeba spojek?

Otázka:

Je třeba definovat ještě další extenzionální výrokové spojky, nebo nám už ty dosavadní stačí?

Nota bene:

Všech extenzionálních spojek, tj. funkcí $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, je nekonečně mnoho (2^{2^n} pro každou aritu n)

Avšak:

Některé mohou být definovatelné pomocí jiných.

(Tj. vyjádřitelné logicky ekvivalentní formulí.)

Definovatelnost spojek

Příklad

- Vzpomeňte: $\vee$ lze definovat pomocí $\wedge$ a $\neg$,

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

- Ternární spojka $?:$ je definovatelná pomocí $\wedge$, $\rightarrow$ a $\neg$ (ověřte!):

$$A\,?\,B : C \equiv (A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C)$$

Otázka

Existuje nějaká (nejlépe malá) sada extenzionálních výrokových spojek, pomocí nichž by již byly definovatelné *všechny* extenzionální výrokové spojky?

Definovatelnost pomocí $\wedge$, $\vee$, $\neg$

Věta

Každou extenzionální výrokovou spojku lze definovat pomocí $\wedge$, $\vee$, $\neg$

Demonstrace

Mějme libovolnou n-ární extenzionální výrokovou spojku c, tj. danou pravdivostní tabulkou o 2^n řádcích.

Sestrojíme formuli obsahující pouze spojky $\wedge$, $\vee$ a $\neg$, která má stejnou pravdivostní tabulku jako c.

Tato formule bude disjunkcí formulí zachycujících řádky pravdivostní tabulky, v nichž c dává hodnotu 1.

(Ukážeme na příkladu, obecný postup bude zřejmý.)

Definovatelnost pomocí $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (pokračování)

Demonstrace – pokračování

Např. za takovéto řádky pravdivostní tabulky:

p	q	r	c
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
...	...	...	...

zařadíme do formule disjunkty:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee \ldots,$$

popisující hodnoty výrokových proměnných na 1., 2. a 4. z uvedených řádků (za 3. řádek nezařazujeme nic, neboť v něm c dává hodnotu 0).

Definovatelnost pomocí $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (dokončení)

Demonstrace – dokončení

Sami zdůvodněte, proč má výsledná disjunkce stejnou pravdivostní tabulku jako spojka c.

Kdy tento postup nebude fungovat?

Dává-li c na každém řádku své pravdivostní tabulky hodnotu 0 – pak do výsledné disjunkce nezařadíme žádný disjunkt, a nesestrojíme tak žádnou formuli.

V takovém případě použijme náhradní formuli $p \wedge \neg p$.
(Opět zdůvodněte, proč má v tomto případě stejnou pravdivostní tabulku jako c.)

Definovatelnost pomocí $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (příklad)

Příklad

Výrokovou spojku NAND s pravdivostní tabulkou:

p	q	NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

vyjádříme pomocí $\wedge$, $\vee$, $\neg$ podle popsaného postupu takto:

$$p \mathrm{\ NAND\ } q \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

(Není to ovšem nejšikovnější vyjádření: ověřte, že také $p \mathrm{\ NAND\ } q \equiv \neg(p \wedge q)$, odkudž název NAND = not-and)

Funkční úplnost

Rekapitulace:

Všechny extenzionální spojky (libovolné arity $n \geq 1$) lze definovat pomocí těchto tří: $\wedge$, $\vee$, $\neg$

Říkáme, že množina spojek $\{\wedge, \vee, \neg\}$ (resp. odpovídajících funkcí $\{F_\wedge, F_\vee, F_\neg\}$) je funkčně úplná.

Otázka

Existují i jiné (menší?) funkčně úplné množiny spojek?

Funkčně úplné množiny spojek

Vzpomeňte:

$\vee$ lze definovat pomocí $\wedge$ a $\neg$: $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

Tedy již množina spojek $\{\wedge, \neg\}$ je funkčně úplná.

Příklady dalších funkčně úplných množin spojek

Podobně jsou funkčně úplné např. následující množiny spojek (dokažte – např. jejich pomocí definujte $\wedge$ a $\neg$):

- $\{\vee, \neg\}$
- $\{\rightarrow, \neg\}$
- $\{\mathrm{NAND}\}$
- $\{\mathrm{NOR}\}$, kde $A \,\mathrm{NOR}\, B \equiv \neg(A \vee B)$ (v přir. jazyce: „ani A ani B“)

Funkčně neúplné množiny spojek

Tvrzení

Posledně uvedené množiny spojek jsou *minimální* funkčně úplné množiny: žádná jejich vlastní podmnožina již funkčně úplná není

Jak dokázat funkční *ne*úplnost?

Najděte *invariant* generované množiny spojek
= vlastnost zachovávanou aplikací všech spojek z množiny, kterou ale některá extenzionální výroková spojka arity $n \geq 1$ nemá

Příklad

$\{\wedge, \vee\}$ není funkčně úplná množina spojek

Nápověda: při ohodnocení všech výrokových proměnných hodnotou 0 bude mít každá formule obsahující jen spojky $\wedge$, $\vee$ hodnotu 0

Nulární spojky

Nulární spojky

Nulární extenzionální výrokové spojky přiřazují jednu z pravdivostních hodnot *bez vstupních argumentů*

V klasické výrokové logice jsou 2:

1. $\top$, s pravdivostní funkcí $F_{\top}() = 1$
2. $\bot$, s pravdivostní funkcí $F_{\bot}() = 0$

Nazývají se též pravdivostní konstanty

Formule $\top$ je při každém ohodnocení pravdivá, formule $\bot$ nepravdivá

Definovatelnost nulárních spojek

Pozorování

- $\top \equiv A \to A \equiv A \vee \neg A \equiv \neg(A \wedge \neg A) \equiv A \leftrightarrow A \equiv \neg\bot$
- $\bot \equiv \neg\top \equiv A \wedge \neg A \equiv \ldots$

Subtilní distinkce

$\top \equiv p \to p$, avšak:

- $F_\top$ je *nulární* funkce, zatímco
- pravdivostní tabulka $p \to p$ je konstantní *unární* funkce

Tedy: logická ekvivalence $\neq$ funkční definovatelnost

Odtud drobný rozdíl mezi funkční úplností a logickou definovatelností (který zde zanedbáme)

Osnova

Disjunktivní normální forma

Pozorujte

Formule zkonstruovaná v demonstraci definovatelnosti všech extenzionálních spojek pomocí $\wedge, \vee, \neg$ měla velmi speciální tvar: byla *disjunkcí konjunkcí atomů či negací atomů*

Terminologie

- Literál = atom (pozitivní literál) či jeho negace (negativní literál)
- Elementární konjunkce = konjunkce literálů
- Disjunktivní normální forma (DNF) = disjunkce elementárních konjunkcí
- Úplná DNF = DNF, v níž se každá výroková proměnná vyskytuje právě jednou v každé elementární konjunkci

Existence DNF

Důsledek

Demonstrace definovatelnosti všech extenzionálních spojek pomocí $\wedge, \vee, \neg$ zároveň ukazuje, že každá formule je ekvivalentní nějaké formuli v disjunktivní normální formě

(a u *splnitelných* formulí, tj. jejichž pravdivostní tabulka dává v alespoň jednom řádku hodnotu 1, dokonce v úplné DNF)

Převod formule na DNF

1. Rozepsání $\rightarrow, \leftrightarrow$ ($\underline{\vee}$, NAND, $\mathrm{NOR}\ldots$) pomocí $\wedge, \vee, \neg$
2. Přesunutí negací k atomům opakovanou aplikací De Morganových zákonů
3. Eliminace násobných negací pomocí zákona dvojné negace
4. Distribuce $\wedge$ přes $\vee$

Pozor: může to formuli až exponenciálně prodloužit

Konjunktivní normální forma

Pozorujte

Provedeme-li v posledním kroku převodu formule na DNF naopak distribuci $\vee$ přes $\wedge$, dostaneme konjunktivní normální formu (CNF), tj. *konjunkci disjunkcí literálů*

Existenci (analogicky definované) úplné CNF pro každou formuli φ, která je při alespoň jednom ohodnocení nepravdivá, dostaneme aplikací De Morganových zákonů (a zákona dvojné negace) na úplnou DNF formule $\neg\varphi$

CNF je důležitá např. v logickém programování, neboť elementární disjunkce jsou ekvivalentní implikačním klauzím $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ literálů (jejich konjunkce je tedy např. logickou formou bází pravidel v Prologu apod.)

De Morganova Dualita

Pozorujte

Záměna všech 0 za 1 a naopak převede:

- pravdivostní tabulku $\wedge$ na pravdivostní tabulku $\vee$
- pravdivostní tabulku $\vee$ na pravdivostní tabulku $\wedge$
- pravdivostní tabulku $\neg$ na sebe samu

= De Morganova dualita

Projevem De Morganovy duality je i vztah úplné CNF formule φ a úplné DNF formule $\neg\varphi$

Věta o dualitě

Nechť formule φ obsahuje pouze spojky $\neg, \wedge, \vee$ a ψ z ní vznikne výměnou $\wedge$ s $\vee$ a výrokových proměnných za jejich negace.
Pak $\varphi \equiv \neg\psi$.

Osnova

Tautologická ekvivalence

Pozorování

Formule φ a ψ jsou logicky ekvivalentní ($\varphi \equiv \psi$) právě tehdy, když je formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ pravdivá při každém ohodnocení výrokových proměnných (tj. dává-li její pravdivostní tabulka ve všech řádcích 1)

Definice

Formule pravdivé při všech ohodnoceních výrokových proměnných nazýváme tautologie (klasické výrokové logiky)

Fakt, že formule φ je tautologie, značíme $\models \varphi$

Vztah logické ekvivalence a spojky ekvivalence

Formule jsou logicky ekvivalentní, právě když je jejich ekvivalence tautologická:

$$\varphi \equiv \psi, \text{ právě když } \models \varphi \leftrightarrow \psi$$

Příklady tautologií

Tautologické ekvivalence

Díky vztahu logické a tautologické ekvivalence ($\varphi \equiv \psi$, právě když $\models \varphi \leftrightarrow \psi$) již spoustu tautologií (tvaru ekvivalence) známe, např.:

- $\models A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ (komutativita konjunkce)
- $\models A \leftrightarrow \neg\neg A$ (zákon dvojné negace)
- $\models (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (zákon kontrapozice)
- $\models (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ (vzájemná definovatelnost spojek)
- $\models \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (De Morganovy zákony), ...

Jiný příklad tautologie:

$\models ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ (ověřte sestrojením pravdivostní tabulky)

Význam tautologií

Význam tautologií

- Tautologie jsou logicky pravdivé výroky:

  Jejich pravdivost nezávisí na stavu věcí (čili na pravdivosti či nepravdivosti atomických výroků), nýbrž je dána pouze jejich logickou formou (a dohodnutým významem logických spojek)

- Tautologie tedy vyjadřují logicky platné zákony:

  Např. tautologicky pravdivé ekvivalence vyjadřují logickou ekvivalenci zúčastněných výroků. Později uvidíme i další důležité druhy tautologií.

Ergo: vědět, zda je formule tautologií, může být důležité (a užitečné)

Ověřování tautologičnosti

Pozorování

Ověření tautologičnosti lze provést sestrojením pravdivostní tabulky

Věta: Tautologičnost formulí klasické výrokové logiky je algoritmicky rozhodnutelná (algoritmická rozhodnutelnost logické ekvivalence v klasické výrokové logice je vlastně jejím důsledkem)

Podobně jako u logické ekvivalence to však může být zdlouhavé (2^n řádků tabulky pro formuli s n výrokovými proměnnými)

Je proto dobré znát i další metody ověření tautologičnosti

Metody ověřování tautologičnosti

Abychom dokázali tautologičnost formule, musíme ověřit, že má při každém ohodnocení pravdivostní hodnotu 1

Abychom vyvrátili tautologičnost formule, musíme najít protipříklad = ohodnocení, při němž nemá pravdivostní hodnotu 1

K tomu probereme postupně několik metod:

- některé (např. pravdivostní tabulky) umožňují poznat obojí,
- jiné (např. dokazování v axiomatice) jen jedno z toho

K některým metodám pomůže znát:

- některé základní tautologie
- některé vlastnosti pojmu tautologičnosti

Metoda pravdivostních tabulek

Použitelnost tabulkové metody

Pro formule s mnoha výrokovými proměnnými je sice sestrojení pravdivostní tabulky formule zdlouhavé (až neproveditelné), u krátkých formulí s málo proměnnými je ale tato metoda zcela dostatečná

To nám umožní získat zásobu jednoduchých základních tautologií, jejichž znalost můžeme využít u efektivnějších metod

Některé z nich vyjadřují důležité zákony klasické výrokové logiky

Cvičení

Ověřte tautologičnost dále uvedených formulí metodou pravdivostních tabulek

Důležité tautologie

Tautologie vyjadřující základní zákony klasické výrokové logiky

- $\models A \vee \neg A$ (zákon vyloučení třetího, *tertium non datur*): vyjadřuje, že vždy jedna z možností $A, \neg A$ je pravdivá – třetí možnost není
- $\models \neg(A \wedge \neg A)$ (zákon sporu): vyjadřuje, že výroky $A, \neg A$ nejsou oba zároveň pravdivé – jsou vzájemně sporné
- $\models \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (*ex falso quodlibet,* z nepravdivého cokoli): nepravdivý výrok pravdivě implikuje cokoli
- $\models (A \wedge \neg A) \rightarrow B$ (*ex contradictione quodlibet,* ze sporu cokoli): sporný (tedy nepravdivý) výrok pravdivě implikuje cokoli
- $\models A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (oslabení): pravdivý výrok je implikován čímkoli
- $\models (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ (prelinearita), atd.

Základní vlastnosti tautologičnosti

Pozorování

1. Všechny tautologie jsou vzájemně logicky ekvivalentní:

$$\text{Pokud } \models A \text{ a } \models B\text{, pak } A \equiv B$$

2. Logická ekvivalence zachovává tautologičnost:

$$\text{Pokud } \models A \text{ a } A \equiv B\text{, pak } \models B$$

Důsledek

Tautologičnost můžeme dokázat mj. logicky ekvivalentním převedením na známou tautologii (často je to výrazně rychlejší než konstrukce pravdivostní tabulky)

Věta o dosazení

Pozorování: věta o dosazení

Nahradíme-li v tautologii všechny výskyty libovolné výrokové proměnné libovolnou formulí, je výsledná formule rovněž tautologií

Kompaktněji: pokud $\models \varphi(p)$, pak $\models \varphi(\psi)$
Nebo: pokud $\models \varphi$, pak $\models \varphi[\psi/p]$

Důkaz

Neformálně zdůvodněte sami pomocí extenzionality spojek
(formální důkaz by byl opět veden indukcí dle stavby φ)

Zkrácené prohledávání pravdivostních tabulek

Idea

Při ověřování (ne)tautologičnosti často nemusíme počítat všechny řádky pravdivostní tabulky: stačí uvažovat, v kterých řádcích tabulky by mohla vyjít 0

Např. u implikace vyjde 0 jen při jednom ze čtyř možných ohodnocení antecedentu a konsekventu – stačí tedy prozkoumat pouze tuto možnost (podobně u disjunkce)

Příklad

Formule $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ je nepravdivá, jen když je $\neg p$ pravdivé a $p \rightarrow q$ nepravdivé. Ovšem pravdivost $\neg p$ znamená nepravdivost p, a v tomto případě už je $p \rightarrow q$ pravdivé. Formule $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ tedy nemůže být nepravdivá v žádném ohodnocení, a je tedy tautologická.

Zkrácené prohledávání pravdivostních tabulek

Kompaktnější zápis

Prohledávané možnosti můžeme zkráceně vyznačovat pod formulí:

$\neg$	p	$\rightarrow$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
		0			
1				0	
	0		1		(0)

Pro proměnnou *p* jsme nakonec dostali rozporné ohodnocení, formule tedy nemůže být nepravdivá

Naopak nedojdeme-li k rozporu, dostaneme nakonec ohodnocení dokládající netautologičnost

Komplikace

V některých případech ($\leftrightarrow$, pravdivá $\vee$ a $\rightarrow$, nepravdivá $\wedge$) musíme tento rozbor případů rozvětvit – diskutovat více možností

Analytická tabla

Metoda

Algoritmizací předchozího postupu je metoda analytických tabel:

1. Pro ověření tautologičnosti formule φ zapíšeme N: φ (předpoklad, že φ je nepravdivá)
2. Podle níže uvedených pravidel rozepisujeme (a případně větvíme) postupně možnosti pro pravdivost podformulí φ

$$\frac{P{:}\, A \wedge B}{\begin{array}{c}P{:}\, A\\ P{:}\, B\end{array}} \qquad \frac{P{:}\, A \vee B}{P{:}\, A \quad P{:}\, B} \qquad \frac{P{:}\, A \rightarrow B}{N{:}\, A \quad P{:}\, B} \qquad \frac{P{:}\, A \leftrightarrow B}{\begin{array}{cc}P{:}\, A & N{:}\, A\\ P{:}\, B & N{:}\, B\end{array}} \qquad \frac{P{:}\, \neg A}{N{:}\, A}$$

$$\frac{N{:}\, A \wedge B}{N{:}\, A \quad N{:}\, B} \qquad \frac{N{:}\, A \vee B}{\begin{array}{c}N{:}\, A\\ N{:}\, B\end{array}} \qquad \frac{N{:}\, A \rightarrow B}{\begin{array}{c}P{:}\, A\\ N{:}\, B\end{array}} \qquad \frac{N{:}\, A \leftrightarrow B}{\begin{array}{cc}P{:}\, A & N{:}\, A\\ N{:}\, B & P{:}\, B\end{array}} \qquad \frac{N{:}\, \neg A}{P{:}\, A}$$

Analytická tabla

Metoda analytických tabel (dokončení)

3. Větev se „uzavře“ (tj. nevede k protipříkladovému ohodnocení), pokud obsahuje P: ψ i N: ψ pro nějakou formuli ψ
4. Pokud v nějaké větvi dojdeme až k atomům, dostali jsme protipříkladové ohodnocení
5. Pokud se všechny větve uzavřou, pak protipříkladové ohodnocení neexistuje a původní formule φ je tautologií

Poznámky

- Pravidla si lze snadno odvodit – popisují chování pravd. tabulek spojek
- Rozmyslete, proč metoda správně rozhoduje tautologičnost každé formule a jak analytická tabla formálně definovat (ohodnocený strom)
- Po úpravě fungují i pro jiné logiky než klasickou výrokovou

Rozhodování tautologičnosti – shrnutí

Tautologičnost můžeme rozhodovat:

1. Pravdivostními tabulkami:
   zdlouhavé až neproveditelné pro dlouhé formule s mnoha proměnnými
2. Převodem na logicky ekvivalentní známou (ne)tautologii:
   s cvikem někdy rychlé
3. Analytickými tably:
   s cvikem lze zefektivnit přednostním probíráním „nadějných“ větví
4. Důkazem ve vhodném axiomatickém systému:
   patří mezi ně vlastně i tabla, systematicky se touto možností budeme zabývat v části o axiomatice

Kontradikce a splnitelné formule

Definice

Říkáme, že formule je:

- kontradikce, pokud je při každém ohodnocení výrokových proměnných nepravdivá
- splnitelná, pokud existuje ohodocení, při němž je pravdivá

Pozorování

- Formule je kontradikce, právě když její negace je tautologie
- Formule je splnitelná, právě když její negace není tautologie

Důsledek

Věty a metody pro tautologie lze příslušně aplikovat i na kontradikce a splnitelnost

Osnova

Logický důsledek

Idea

Vedle logické ekvivalence formulí (tj. *shodnosti* pravdivostních hodnot ve všech ohodnoceních) nás často zajímá i situace, kdy pravdivost jedné či více formulí (předpokladů) *zaručuje* pravdivost nějaké formule (závěru)

V tomto případě mluvíme o logickém vyplývání či (synonymně) o logickém důsledku

Definice

Formule ψ vyplývá (v klasické výrokové logice) z formule φ, pokud v každém ohodnocení výrokových proměnných, v němž je formule φ pravdivá, je pravdivá i formule ψ.

Značení: $\varphi \models \psi$

Vztah k logické ekvivalenci

Příklad

$p \wedge q \vDash p \rightarrow q$ (ověřte pravdivostní tabulkou); není však $p \wedge q \equiv p \rightarrow q$

Pozorování (zdůvodněte)

Pro libovolné formule klasické výrokové logiky platí:

- Jestliže $\varphi \equiv \psi$, pak $\varphi \vDash \psi$
- $\varphi \equiv \psi$, právě když $\varphi \vDash \psi$ a $\psi \vDash \varphi$
- Jestliže $\varphi \vDash \psi$ a $\varphi \equiv \varphi'$ a $\psi \equiv \psi'$, pak $\varphi' \vDash \psi'$
- Jestliže $\varphi \vDash \psi$ a $\psi \vDash \chi$, pak $\varphi \vDash \chi$
- $\varphi \vDash \varphi$

Tedy relace $\vDash$ mezi formulemi je reflexivní a tranzitivní (neboli je *kvaziuspořádáním* formulí) a její symetrizací je relace $\equiv$.

Uspořádání podle logické síly

Vzpomeňte:

Logická ekvivalence $\equiv$ je relací ekvivalence na formulích;

Určuje tedy rozklad množiny všech formulí na disjunktní třídy ekvivalence (jednu z nich tvoří tautologie, jinou kontradikce)

Relace logického důsledku $\models$ tyto třídy respektuje

Uspořádání relací důsledku na třídách ekvivalentních formulí

Označme $[\varphi]$ třídu všech formulí logicky ekvivalentních formuli φ, tj. $[\varphi] = \{\psi \mid \varphi \equiv \psi\}$

Definujme: $[\varphi] \leq [\psi]$, právě když $\varphi \models \psi$

Z předchozích tvrzení plyne, že $\leq$ je uspořádáním tříd ekvivalence

Formule jsou tedy relací vyplývání kvaziuspořádány (a při ztotožnění ekvivalentních formulí uspořádány) podle *logické síly:*

Je-li $\varphi \models \psi$, říkáme, že φ je *logicky silnější* než ψ

Lindenbaumova algebra

Pozorujte a zdůvodněte

- Který je nejmenší a největší prvek v uspořádání $\leq$ na množině $\mathrm{Form}/\equiv$ tříd ekvivalentních formulí? (Tj. které formule jsou logicky nejslabší resp. nejsilnější?)
- Definujme $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$ a analogicky pro ostatní spojky. (Proč je tato definice korektní?)

Lindenbaumova algebra klasické výrokové logiky

Množina $\mathrm{Form}/\equiv$ tříd logicky ekvivalentních formulí uspořádaná podle logické síly a s výše definovanými operacemi se nazývá Lindenbaumovou(-Tarského) algebrou klasické výrokové logiky

Jedná se o (nekonečnou) Boolovu algebru

Tautologická implikace

Pozorování

$\varphi \models \psi$, právě když $\models \varphi \to \psi$ (zdůvodněte!)

Důsledek

Tautologie tvaru implikace tedy zachycují vyplývání jednoho výroku z druhého

(Pozorujte analogický rozdíl mezi $\to$ a $\models$ jako v případě $\leftrightarrow$ a $\equiv$)

Důsledek

Věty a metody pro tautologičnost lze příslušně aplikovat i na logické vyplývání (rozmyslete které a jak)

Craigova interpolace

Věta (o interpolaci)

Jestliže $\varphi \models \psi$, pak existuje formule χ (zvaná *interpolant*) taková, že $\varphi \models \chi$ a $\chi \models \psi$, přičemž χ obsahuje pouze výrokové proměnné vyskytující se v *obou* formulích φ, ψ (tj. $\mathrm{Var}(\chi) \subseteq \mathrm{Var}(\varphi) \cap \mathrm{Var}(\psi)$)

Příklad důsledku

Pokud φ, ψ nemají žádné společné výrokové proměnné, pak $\varphi \not\models \psi$, leda by φ bylo kontradikcí nebo ψ tautologií (rozmyslete!)
(Vzpomeňte: $\models \neg\varphi$, právě když $\varphi \equiv \bot$; $\models \psi$, právě když $\psi \equiv \top$)

Intuitivní význam

Výrokové proměnné, které se v druhé formuli nevyskytují, logickému vyplývání „nenapomáhají“: logický důsledek platí, jen když na nich v jistém smyslu „nezáleží“

Důkaz věty o interpolaci

Důkaz

Nechť $\varphi \models \psi$. Existenci interpolantu χ dokážeme matematickou indukcí podle počtu výrokových proměnných ve $\mathrm{Var}(\varphi) \smallsetminus \mathrm{Var}(\psi)$:

1. Pokud $\mathrm{Var}(\varphi) \smallsetminus \mathrm{Var}(\psi)$ má 0 prvků, pak interpolantem je formule φ. (Zdůvodněte!)
2. Indukční krok:
    - Předpokládejme indukční hypotézu, že existence interpolantu již byla dokázána pro všechny formule η takové, že $\mathrm{Var}(\eta) \smallsetminus \mathrm{Var}(\psi)$ má n prvků
    - Nyní nechť $\mathrm{Var}(\varphi) \smallsetminus \mathrm{Var}(\psi)$ má $n+1$ prvků
    - Zvolme výrokovou proměnnou $p \in \mathrm{Var}(\varphi) \smallsetminus \mathrm{Var}(\psi)$
    - Definujme φ' jako $\varphi[\top/p] \vee \varphi[\bot/p]$

Důkaz věty o interpolaci (dokončení)

Důkaz (dokončení)

1. Indukční krok (dokončení):
   - Pozorujte:
     1. $\varphi' \models \psi$ (rozeberte případy ohodnocení p hodnotou 0 a 1)
     2. $\mathrm{Var}(\varphi') \setminus \mathrm{Var}(\psi)$ má n prvků (ubylo p)
     3. $\varphi \models \varphi'$ (též rozeberte případy ohodnocení p hodnotou 0 a 1)
   - Podle (1), (2) a indukční hypotézy existuje interpolant η, že:
     4. $\varphi' \models \eta$
     5. $\eta \models \psi$
     6. $\mathrm{Var}(\eta) \subseteq \mathrm{Var}(\varphi') \cap \mathrm{Var}(\psi)$
   - Podle (3), (4) a tranzitivity vyplývání dostáváme:
     7. $\varphi \models \eta$
   - Tedy podle (7), (5) a (6) je η interpolantem $\varphi \models \psi$

Konstrukce interpolantu

Uvědomte si:

Důkaz věty o interpolaci byl *konstruktivní,* tj. dal nám návod, jak interpolant nalézt (rozmyslete!)

Algoritmus nalezení interpolantu $\varphi \models \psi$

1. Za χ vezměme φ
2. Nemá-li χ žádné proměnné navíc proti ψ, je interpolantem χ
3. Jinak zvolme proměnnou $p \in \mathrm{Var}(\chi) \setminus \mathrm{Var}(\psi)$, nahraďme χ formulí $\chi[\top/p] \vee \chi[\bot/p]$ a pokračujme bodem (2)

Nevýhoda

Interpolant může být exponenciálně delší oproti původní formuli φ (kvůli zdvojnásobování délky v bodě (3) algoritmu)

Vyplývání z množiny premis

Zobecnění – definice:

Formule φ je důsledkem (či: vyplývá z) *množiny* formulí T, pokud každé ohodnocení, které činí pravdivými *všechny* formule z T, činí pravdivou i formuli φ

Značení: $T \vDash \varphi$

Místo $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vDash \varphi$ píšeme jen $\psi_1, \ldots, \psi_n \vDash \varphi$

Místo $T_1 \cup T_2 \vDash \varphi$ píšeme $T_1, T_2 \vDash \varphi$

Nejprve se budeme zabývat (jednodušším) případem, kdy je množina T (tj. množina *předpokladů, premis*) *konečná*

Vyplývání z konečně mnoha předpokladů

Speciální případy

- Vyplývání z jednoho předpokladu jsme již poznali ($\psi \models \varphi$)
- Vyplývání z prázdné množiny předpokladů je totéž, co tautologičnost (zdůvodněte!)

Pozorování

$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$, právě když $\models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi$ (zdůvodněte!)

Důsledek

Věty a metody pro tautologičnost lze příslušně aplikovat i na logické vyplývání z konečně mnoha předpokladů (rozmyslete)

Význam vyplývání z předpokladů

Význam vyplývání z předpokladů

Vyplývání z předpokladů zachycuje (výrokově)logicky platné úsudky, tj. takové úsudky, které nás nemohou dovést od pravdivých předpokladů k nepravdivým závěrům

Platnost těchto úsudků vyplývá pouze jejich logickou formou (a dohodnutým významem výrokových spojek)

Platnost těchto úsudků nezávisí na stavu světa (tj. pravdivosti atomických výroků = konkrétním ohodnocení), neboť jde o chování při *všech* ohodnoceních. Rozlišuje se:

- Platný úsudek: závěr logicky vyplývá z předpokladů
- Správný úsudek: platný úsudek s *pravdivými* předpoklady

Správný úsudek zaručuje pravdivost závěru; platný jen správnost vyvození (závěr však nemusí být pravdivý, není-li některá z premis)

Pravidla správného usuzování

Pravidla správného usuzování

Instance logického vyplývání formulí z předpokladů jsou formalizací pravidel logicky správného usuzování

Uvedeme několik základních příkladů takových pravidel (platnost všech ověřte!)

Základní příklady pravidel správného usuzování

- $A, A \rightarrow B \models B$ (modus ponens, odloučení)
- $A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$ (modus tollens)
- $A \vee B, \neg A \models B$ (disjunktivní sylogismus)
- $A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$ (hypotetický sylogismus)

Pravidla správného usuzování

Další základní příklady pravidel správného usuzování

- $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \models C$ (rozbor případů)
- $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \models \neg A$ (reductio ad absurdum, důkaz sporem)
- $A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B \models B$ (věta o neutrální formuli)

Další příklady pravidel logicky správných úsudků již známe jako tautologické implikace a logické ekvivalence, např.:

- $A, \neg A \models B$ (ex contradictione quodlibet)
- $\neg\neg A \models A$ (zákon dvojné negace) aj.

Internalizace pravidel

Internalizace

Protože $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$ je ekvivalentní $\models \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \to \varphi$, lze uvedená pravidla formulovat i jako tautologie („internalizovat“), např.:

- $\models A \wedge (A \to B) \to B$ (internalizovaný modus ponens)
- $\models (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ (internalizovaná kontrapozice), atd.

Caveat

V mnoha logikách jiných než klasické (modálních, intuicionistické, vícehodnotových, …) tato internalizace není ekvivalentní, a pravidla v nich mají jinou sílu než jejich internalizace (v klasické výrokové logice splývají díky větě o dedukci – viz dále)

Obecně je třeba rozlišovat:

1. Tautologie: $\models \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \to \varphi$
2. Pravidla: $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$ (přenášejí pravdivost)
3. Metapravidla: pokud $\models \psi_1$ až $\models \psi_n$, pak $\models \varphi$ (přenášejí tautologičnost)

Vyplývání z libovolné množiny předpokladů

Vzpomeňte

Přestože jsme se dosud zabývali vyplýváním z konečně mnoha premis (jakožto jednodušším případem), v obecné definici žádné omezení na množinu premis nebylo

Připomenutí definice:

Formule φ je důsledkem (či: vyplývá z) *množiny* formulí T, pokud každé ohodnocení, které činí pravdivými *všechny* formule z T, činí pravdivou i formuli φ (píšeme: $T \models \varphi$)

Nyní se budeme zabývat tímto obecným případem

Věta o dedukci

Pozorování (věta o dedukci)

$T, \varphi \models \psi$, právě když $T \models \varphi \to \psi$

Důkaz

Zdůvodněte sami (jde o jednoduchý důsledek definice $\models$ a $\to$)

Již dříve pozorovaný důsledek

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$, právě když $\models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$

V případě nekonečných množin předpokladů už tuto redukci na tautologičnost nemůžeme provést (formule musí být konečná)

Kupodivu je však přesto nekonečný případ v určitém smyslu redukovatelný na konečný

Věta o kompaktnosti

Věta (o kompaktnosti)

Jestliže $T \models \varphi$, pak existuje *konečná* podmnožina formulí $T' \subseteq T$ taková, že $T' \models \varphi$

Důkaz

1. Dokazujme kontrapozitivně: předpokládejme, že φ nevyplývá z žádné konečné $T' \subseteq T$; dokážeme, že pak nevyplývá ani z celé T
2. Uspořádáme výrokové proměnné do posloupnosti $p_1, p_2, p_3, \ldots$
3. Indukcí zkonstruujeme částečná ohodnocení $e_0, e_1, e_2, \ldots$ tak, že vždy:

   (3.1) e_i je definováno pro $p_1, \ldots, p_i$
   (3.2) pro všechna $j < i$ se e_i shoduje s e_j na proměnných $p_1, \ldots, p_j$
   (3.3) pro každé konečné $T' \subseteq T$ existuje ohodnocení e, které:

   1. rozšiřuje e_i
   2. a splňuje všechny formule z T', ale nesplňuje formuli φ

Důkaz věty o kompaktnosti

Důkaz (pokračování):

4. Za e_0 vezmeme prázdné částečné ohodnocení (požadované indukční podmínky bodu 3 splňuje dle předpokladu z bodu 1)
5. Máme-li e_i, rozšíříme je na e_{i+1} dodefinováním pro p_{i+1} takto:
   - **(a)** Pokud pro každé konečné $T' \subseteq T$ existuje ohodnocení e tak, že:
     - e rozšiřuje e_i,
     - e splňuje všechny formule z T', ale nesplňuje φ
     - a $e(p_{i+1}) = 1$,

     pak definujeme $e_{i+1}(p_{i+1}) = 1$
   - **(b)** Jinak definujeme $e(p_{i+1}) = 0$
6. Pokud e_i splňuje indukční podmínky (bodu 3), pak e_{i+1} je splňuje také:
   - v případě (a) triviálně
   - v případě (b) je ověříme

Důkaz věty o kompaktnosti

Důkaz (pokračování):

7. Ověření indukčních podmínek bodu 3 pro e_{i+1} v případě (b) bodu 5:
   - Nechť tedy pro nějaké konečné $S \subseteq T$ neexistuje žádné ohodnocení $\bar{e}$ takové, že:
     - $\bar{e}$ by rozšiřovalo e_i,
     - $\bar{e}$ by splňovalo všechny formule z S, ale nesplňovalo φ
     - a bylo by $\bar{e}(p_{i+1}) = 1$
   - Buď dáno konečné $T' \subseteq T$. Podle indukčního předpokladu (bod 3) pro e_i existuje e takové, že:
     1. rozšiřuje e_i
     2. a splňuje všechny formule z $T' \cup S$, ale nesplňuje formuli φ (neboť $T' \cup S$ je konečná množina formulí)

   Pro toto e musí být $e(p_{i+1}) = 0$ (dle předpokladu tohoto kroku)

Důkaz věty o kompaktnosti

Důkaz (dokončení):

8. Máme tedy zkonstruovánu rostoucí posloupnost ohodnocení $e_1, e_2, \ldots$ splňující podmínky z bodu 3
9. Jejich sjednocení e_ω je protipříkladovým ohodnocením pro $T \not\models \varphi$:
   - e_ω je ohodnocením všech výrokových proměnných (dle podmínek 3.1 a 3.2)
   - e_ω nesplňuje φ (dle 3.3)
   - e_ω splňuje všechny formule z T:

     Kdyby e_ω nesplňovalo některou $\psi \in T$, pak by ji nesplňovalo už některé e_i (neboť ψ má jen konečně mnoho výrokových proměnných) = spor s podmínkou 3.3

Poznámky k větě o kompaktnosti

Poznámky

- Větu lze dokázat i při uvažování možnosti nespočetné množiny výrokových proměnných, je k tomu ale třeba nějaká forma axiomu výběru (pro dobré uspořádání množiny výrokových proměnných)

  Důkaz je obdobný, v limitních krocích (nyní transfinitní) indukce částečná ohodnocení sjednocujeme; ověření indukční hypotézy je na nich podobné našemu bodu 9
- K ozřejmení myšlenky důkazu je vhodné vyjasnit strukturu ohodnocení (spočetně mnoha) výrokových proměnných

Struktura spočetných výrokových ohodnocení

Pozorujte:

- Množinu všech ohodnocení $\{p_1, p_2, p_3, \dots\} \rightarrow \{0, 1\}$ lze chápat jako nekonečný binární strom („vějíř“)
- Jednotlivá ohodnocení jsou nekonečnými cestami v tomto stromu
- V důkazu kompaktnosti si postupně hledáme cestu v tomto stromu podle vhodných pravidel (rozmyslete)
- Jednotlivá ohodnocení lze jednoznačně kódovat reálnými čísly s rozvojem $0, x_1 x_2 x_3 \dots$, kde $x_i = 0$, pokud $e(p_i) = 0$, a $x_i = 9$, pokud $e(p_i) = 1$ (jejich množina je tedy izomorfní Cantorovu diskontinuu)
- V důsledku těchto pozorování lze důkaz kompaktnosti přeformulovat pomocí Königova lemmatu (o nekonečných větvích v nekonečných binárních stromech) či topologické kompaktnosti Cantorova diskontinua (detaily přesahují rozsah tohoto kurzu)

Obecné vlastnosti logického důsledku

Pozorování (zdůvodněte!)

1. Pokud $\varphi \in T$, pak $T \models \varphi$ (reflexivita)
2. Pokud $T \models \varphi$ pro všechny $\varphi \in T'$ a $T' \models \psi$, pak $T \models \psi$ (pravidlo řezu)
3. Pokud $T \models \varphi$ a $T \subseteq T'$, pak $T' \models \varphi$ (monotonie = důsledek 1+2: dokažte!)
4. Pokud $T \models \varphi$, pak $T' \models \varphi'$, kde T', φ' vznikne z T, φ současnou substitucí libovolných formulí vždy za všechny výskyty výrokových proměnných (invariance vůči substitucím, „strukturalita“)
5. Pokud $T \models \varphi$, pak $T' \models \varphi$ pro nějakou konečnou $T' \subseteq T$ (finitárnost = věta o kompaktnosti)

Tarského relace důsledku

Všimněte si:

Předchozí vlastnosti jsou nezávislé na jazyce klasické výrokové logiky – hovoří jen o vyplývání formulí z množin formulí

(mají tedy smysl i pro jiné logiky než jen klasickou výrokovou)

Terminologie

Relace důsledku, která splňuje podmínky reflexivity a řezu (a tedy i monotonie), se nazývá Tarského relace důsledku

Relace důsledku klasické výrokové logiky je tedy příkladem *finitární strukturální Tarského relace důsledku*

Zkoumají se i neklasické logiky, jejichž relace důsledku tyto vlastnosti nemají (např. nemonotonní logiky)

Důsledkový uzávěr

Definice

Pro množinu formulí T definujme množinu všech jejích důsledků:

$$C(T) = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$$

$C(T)$ se nazývá důsledkový uzávěr množiny formulí T

Množina formulí T se nazývá důsledkově uzavřená, když $C(T) = T$

Vlastnosti důsledkového uzávěru

Pozorování (zdůvodněte!)

1. $T \subseteq C(T)$
2. $C(C(T)) = C(T)$
3. Pokud $T \subseteq T'$, pak $C(T) \subseteq C(T')$
4. $C(\sigma(T)) = \sigma(C(T))$,
   kde σ je libovolná substituce formulí za výrokové proměnné
5. $C(T) = \bigcup\{C(T') \mid T' \text{ konečná}, T' \subseteq T\}$

Tvrzení (zkuste dokázat)

Uvedené vlastnosti 1+2+3 jsou ekvivalentní podmínkám Tarského relace důsledku (s vlastností 4 strukturální, s vlastností 5 finitární)

Osnova

Výrokové teorie

Idea

Množiny formulí lze chápat jako výrokové teorie (soubory výroků považovaných za pravdivé) a omezit se na ohodnocení, v nichž mají všechny formule z dané teorie hodnotu 1

Takovým ohodnocením se říká modely dané výrokové teorie

Všimněte si: takových ohodnocení může být víc – teorie nemusí jednoznačně určovat pravdivost všech atomických výroků

Formule z dané teorie lze chápat jako axiomy (postuláty) dané teorie; formule z jejího důsledkového uzávěru jsou důsledky těchto axiomů

Všimněte si: Důsledky dané teorie jsou právě ty formule, které jsou pravdivé ve všech jejích modelech

Výrokové teorie nejsou příliš zajímavé (kvůli malé vyjadřovací síle výrokové logiky), již na nich se ale ukazují jisté vlastnosti predikátových teorií

Výrokové teorie – definice

Definice

Výrokovou teorií rozumíme libovolnou množinu výrokových formulí

Modelem výrokové teorie T rozumíme libovolné ohodnocení, v němž jsou všechny formule z T pravdivé

Důsledkem teorie T rozumíme každou formuli vyplývající z T; pokud $T \models \varphi$, říkáme, že φ platí v T

Upozornění

V literatuře se někdy za teorie považují pouze důsledkově uzavřené množiny formulí (teorie je tak ztotožňována s množinou všech jejích důsledků)

Takové pojetí neumožňuje rozlišovat mezi axiomy a důsledky dané teorie, proto zde za teorii považujeme libovolnou množinu formulí

Teorie a modely

Definice

Buď T teorie a K množina ohodnocení. Definujeme:

- Mod(T) = množina všech modelů teorie T
- Th(K) = množina všech formulí pravdivých v každém ohodnocení z K

Pozorujte

- Pokud $T \subseteq T'$, pak $\mathrm{Mod}(T') \subseteq \mathrm{Mod}(T)$
- Pokud $K \subseteq K'$, pak $\mathrm{Th}(K') \subseteq \mathrm{Th}(K)$

Splnitelné teorie

Definice

Teorie je splnitelná, pokud má model

Pozorování

Teorie je nesplnitelná, právě když v ní platí všechny formule

Pozorování

$T \models \varphi$, právě když teorie $T, \neg\varphi$ není splnitelná

Důsledek: věta o kompaktnosti pro splnitelnost

Teorie je splnitelná, (právě) když je každá její konečná podmnožina splnitelná (odvoďte z věty o kompaktnosti!)

Úplné teorie

Definice

Výroková teorie je úplná, když má jediný model

Ekvivalentně:

Definice vhodné i pro logiky, v nichž jedinečnost modelu nelze teoriemi vynutit (např. klasickou prvořádovou):

- Výroková teorie je úplná, právě když jednoznačně určuje pravdivostní hodnotu každé formule
- Výroková teorie je úplná, právě když je maximální splnitelnou teorií

Pozorování

Úplné teorie jsou důsledkově uzavřené (zdůvodněte!)

Zúplnění teorie

Věta

Každou splnitelnou teorii lze zúplnit

Důkaz

Všechny formule seřadíme do posloupnosti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (rozmyslete jak) a postupně k teorii přidáváme vždy:

- buď φ_i (pokud je společně s touto formulí splnitelná),
- nebo $\neg\varphi_i$ (jinak).

(Rozmyslete podrobněji)

Axiomatizovatelnost

Definice

Množina ohodnocení K je:

- axiomatizovatelná, pokud $K = \mathrm{Mod}(T)$ pro nějakou teorii T
- rekurzivně axiomatizovatelná, pokud $K = \mathrm{Mod}(T')$ pro nějakou rekurzivní teorii T' (tj. množinu axiomů, náležení do níž lze algoritmicky rozhodnout)
- konečně axiomatizovatelná, pokud $K = \mathrm{Mod}(T')$ pro nějakou konečnou (pomocí $\wedge$ ekvivalentně: jednoprvkovou) teorii T'

Obdobné pojmy je možno vyslovit pro teorie (prostřednictvím $K = \mathrm{Th}(T)$: rozmyslete)

Neaxiomatizovatelnost

Existence neaxiomatizovatelných množin ohodnocení

Z úvahy o mohutnostech množin (promyslete):

- Všech formulí je spočetně mnoho
- Tedy množina všech teorií má mohutnost kontinua
- Množina všech ohodnocení má mohutnost kontinua (jde o zobrazení spočetné množiny výrok. proměnných do $\{0, 1\}$)
- Tedy všech množin ohodnocení je více než kontinuum

Tedy existují neaxiomatizovatelné množiny ohodnocení

Zajímavé otázky týkající se výrokových teorií zde již pomineme (např.: existují výrokové teorie, které nejsou konečně či rekurzivně axiomatizovatelné? – zčásti viz cvičení)

Uspořádání teorií podle síly

Definice

- $T \models T'$, pokud $T' \subseteq C(T)$ ... T je silnější než T'
- $T \equiv T'$, pokud $C(T') = C(T)$ ... teorie T a T' jsou ekvivalentní

Pozorujte:

- $T \models T'$ a $T \equiv T'$ zobecňují vztahy $\varphi \models \psi$ (či $T \models \psi$) a $\varphi \equiv \psi$
- Ekvivalence $\equiv$ je symetrizací kvaziuspořádání $\models$ na teoriích
- $T \equiv C(T)$, stačí se tedy omezit na důsledkově uzavřené teorie

Svaz důsledkově uzavřených teorií

Pozorujte:

- Množina všech důsledkově uzavřených teorií s uspořádáním relací $\models$ tvoří úplný svaz (promyslete, co je supremem a infimem množiny důsledkově uzavřených teorií)
- Promyslete další vlastnosti: např. kde se v této hierarchii nacházejí nesplnitelné, úplné či prázdná teorie?

Poznámka

Složitějšími (ale užitečnými) vztahy teorií jsou *interpretovatelnost* jedné teorie v druhé a pojem *konzervativního rozšíření* teorie (v tomto kurzu je však již musíme nechat stranou)

Ekvivalence a důsledek v teorii

Idea

Přijímáme-li axiomy teorie T jako pravdivé, omezujeme se na ohodnocení, která jsou modely této teorie

Pojmy důsledku a ekvivalence můžeme relativizovat do množiny těchto modelů

Definice

Řekneme, že φ je ekvivalentní formuli ψ v teorii T, pokud v každém modelu T mají φ a ψ touž pravdivostní hodnotu

(analogicky definujte pro pojmy důsledku a množiny formulí)

Pozorování (rozmyslete)

V klasické výrokové logice jsou tyto pojmy redukovatelné na logický důsledek: $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$; $T, \varphi \models \psi$; $T, T' \models \psi$; $T, T' \equiv T, T''$; atd.

Lindenbaumova algebra teorie

K úvaze

Konstrukci Lindenbaumovy algebry lze analogicky provést relativně vůči výrokové teorii (rozmyslete detaily):

- Množinu všech formulí faktorizujeme podle ekvivalence v teorii T
- Uspořádáme ji podle logické síly v teorii T (tj. vyplývání v T)
- Definujeme operace na třídách ekvivalence indukované výrokovými spojkami

V klasické výrokové logice tak získáme rozličné Booleovy algebry (příklady uvidíme v cvičeních, jejich charakterizaci již ponecháme otevřenou)

Metody důkazu

Na pravidlech správného usuzování klasické výrokové logiky jsou založeny některé metody (zejména matematických) důkazů:

- Důkaz přímý: pro důkaz $A \rightarrow B$ dokážeme B z předpokladu A
  Založeno na pozorování: $T \models \varphi \rightarrow \psi$, pokud $T, \varphi \models \psi$ (věta o dedukci)
- Důkaz nepřímý: pro důkaz $A \rightarrow B$ dokážeme $\neg A$ z předpokladu $\neg B$
  Založeno na pozorování, že $T \models \varphi \rightarrow \psi$, pokud $T, \neg\psi \models \neg\varphi$
- Důkaz sporem: pro důkaz A dokážeme $B \wedge \neg B$ z předpokladu $\neg A$
  Založeno na pozorování, že $T \models \varphi$, pokud $T, \neg\varphi \models \bot$
  Speciálně stačí z $\neg A$ dokázat A (zdůvodňujte již sami)
- Důkaz rozborem případů: Pokud máme dokázáno $B \vee C$, pak pro důkaz A stačí dokázat A z předpokladu B i z předpokladu C

Systematicky se pojmem důkazu zabývá axiomatika klasické výrokové logiky = další téma kurzu