Teorie kategorií

Studijní materiál pro kurs `ALGV00051` na FF UK v LS 2012/13
Další informace: `www.cs.cas.cz/behounek/teaching/cat12`

Libor Běhounek
`behounek@cs.cas.cz`

Verze ke dni 12. března 2013.

Organizační záležitosti

Přednáška se koná v 8 trojhodinových blocích, vždy v úterý v 16:15 – 18:50 na Ústavu informatiky AV ČR, v blízkosti stanice metra Ládví (Pod Vodárenskou věží 2, Praha 8, místnost 318). Předběžně jsou plánovány tyto termíny konání: 12., 19. a 26. března, 16., 23. a 30. dubna a 7. a 14. května.

Kurz předpokládá základní znalost logiky a teorie množin (zhruba v rozsahu kurzů katedry logiky FF UK Teorie množin I a Klasická logika I).

Doporučená literatura

- Adámek J.: *Matematické struktury a kategorie.* SNTL 1982.
- Goldblatt R.: *Topoi: The Categorial Analysis of Logic* (kap. 1-3 a 9). Revised edition, North-Holland 1984.
- Lawvere F. W., Rosebrugh R.: *Sets for Mathematics.* Cambridge University Press 2003.
- Mac Lane S.: *Categories for the Working Mathematician* (kap. 1-5). Second edition, Springer 1998.

Obsah

Kapitola 1

Příklady matematických struktur a kategorií

Teorii kategorií lze chápat jako abstraktní zobecnění obecné teorie matematických struktur, založené na pojmu *zobrazení přenášejícího strukturu,* neboli *morfismu* struktur. K dobrému pochopení pojmů teorie kategorií a jejich motivací je proto třeba mít dostatečnou zásobu příkladů matematických struktur, morfismů mezi nimi a pojmů, které lze pomocí morfismů charakterizovat. Takovou zásobu vybudujeme v této kapitole.

Členění této kapitoly na struktury relační, algebraické a topologické zhruba odpovídá Bourbakiho dělení základních matematických struktur v jeho strukturalistické představě architektury matematiky. Zvlášť jsou pojednány struktury, s nimiž se setkáváme v logice a základech matematiky, přestože formálně by je bylo možno přiřadit k některým z výše uvedených typů struktur.

1.1 Relační struktury

1.1.1 Uspořádání a monotonní zobrazení

Definice 1.1.1.1. Binární relace $\leq$ na množině X je *uspořádáním* (angl. *order, ordering*), je-li na X:

- reflexivní, tj. $(\forall x \in X)(x \leq x)$,
- tranzitivní, tj. $(\forall x, y, z \in X)(x \leq y \ \&\ y \leq z \Rightarrow x \leq z)$,
- a antisymetrická, tj. $(\forall x, y \in X)(x \leq y \ \&\ y \leq x \Rightarrow x = y)$.

Množinu X uspořádanou relací $\leq$ značíme $(X, \leq)$. Dvojici $(X, \leq)$ nazýváme *uspořádanou množinou.*

Příklad 1.1.1.2. Příklady uspořádání (např. reálných čísel podle velikosti, přirozených čísel dělitelností apod.) jsou všeobecně známé. Důležitou roli v dalším výkladu budou hrát dvě nejjednodušší uspořádané množiny, totiž *prázdná* (s prázdným uspořádáním) a *jednoprvková* (s jediným možným uspořádáním).

Uspořádaná množina $(X, \leq)$ je příkladem *matematické struktury.* Matematickou strukturou se míní nějaká množina (v tomto případě X) s nějakou *strukturací* (zde uspořádáním $\leq$).

Značení. Označíme-li uspořádanou množinu $(X, \leq)$ jako A, tj. $A = (X, \leq)$, pak její nosnou množinu X lze značit jako $\dot{A}$; tj. $A = (\dot{A}, \leq)$. Je-li třeba zdůraznit, že A je strukturou, a nikoli pouze množinou, je možno psát ji tučně; tedy např. $\mathbf{A} = (X, \leq)$, $\mathbf{A} = (A, \leq)$ či $\mathbf{A} = (\dot{\mathbf{A}}, \leq)$.

Definice 1.1.1.3. Jsou-li $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$ dvě uspořádané množiny, pak zobrazení $f\colon X \to Y$ (tj. $\mathrm{Dom}(f) = X$ a $\mathrm{Rng}(f) \subseteq Y$) je *monotonní* (vůči $\leq$ a $\preceq$), pokud $(\forall x, y \in X)(x \leq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y))$.

Monotonní zobrazení jsou právě ta, která *zachovávají strukturu,* tj. v našem případě *zachovávají uspořádání*: kdykoli je dvojice vzorů $(x, y) \in X^2$ v uspořádání $\leq$ na X, je i dvojice jejich obrazů $(f(x), f(y)) \in Y^2$ v uspořádání $\preceq$ na Y. Říkáme proto, že monotonní zobrazení jsou *morfismy* uspořádaných množin. Fakt, že f je morfismem mezi uspořádanými množinami $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$, zapisujeme výrazem $f\colon (X, \leq) \to (Y, \preceq)$. Uspořádanou množinu $(X, \leq)$ nazýváme *doménou* a uspořádanou množinu $(Y, \preceq)$ *kodoménou* morfismu $f\colon (X, \leq) \to (Y, \preceq)$. Doménu morfismu f značíme $\mathrm{dom}\, f$ a kodoménu $\mathrm{cod}\, f$.

Poznámka. Pozor, kodoména morfismu $f\colon (X, \leq) \to (Y, \preceq)$ není totéž, co obor hodnot $\mathrm{Rng}(f)$ zobrazení f. Zatímco $\mathrm{Rng}(f)$ může být vlastní částí množiny Y, kodoménou je *celá* uspořádaná množina $(Y, \preceq)$. Navíc $\mathrm{Rng}(f)$ je množinou, kdežto $\mathrm{cod}\, f$ je *strukturou,* v tomto případě tedy *uspořádanou* množinou $(Y, \preceq)$. Kodoména morfismu $f\colon (X, \leq) \to (Y, \preceq)$ není určena pouze samotným monotonním zobrazením $f\colon X \to Y$, a musí být specifikována spolu s f, aby byl morfismus $f\colon (X, \leq) \to (Y, \preceq)$ určen. Tytéž poznámky platí i pro doménu $\mathrm{dom}\, f$, přestože její nosná množina X (ale už nikoli nutně celá struktura $(X, \leq)$) je zobrazením $f\colon X \to Y$ určena coby $\mathrm{Dom}(f)$.

Příklad 1.1.1.4. Zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je monotonním zobrazením mezi uspořádanými množinami $(\mathbb{R}, \leq)$ a $(\mathbb{R}, \leq)$, stejně jako mezi $(\mathbb{R}, \leq)$ a $(\mathbb{R}, \geq)$ či mezi $(\mathbb{R}, \geq)$ a $(\mathbb{N}, \leq)$, kde $\leq$ je obvyklé uspořádání reálných čísel (či jeho restrikce na $\mathbb{N}$) a $\geq$ uspořádání k němu inverzní. Aby bylo určeno, o který morfismus uspořádaných množin jde, je nutno spolu s f specifikovat uspořádané množiny, které jsou jeho doménou a kodoménou, např.: $f\colon (\mathbb{R}, \leq) \to (\mathbb{N}, \geq)$.

V důsledku toho je nutno za morfismus uspořádaných množin nutno považovat *trojici* sestávající z uspořádané množiny $(X, \leq)$, která je jeho doménou, dále uspořádané množiny $(Y, \preceq)$, která je jeho kodoménou, a monotonního zobrazení mezi těmito uspořádanými množinami. Tento morfismus bychom správně měli značit jinak než samotné zobrazení f (neboť, jak jsme viděli v příkladu 1.1.1.4, totéž f může být třetí složkou *různých* morfismů). V praxi však označujeme morfismy uspořádaných množin často stejně jako jejich podkladová monotonní zobrazení, a v případě potřeby doplňujeme specifikaci jejich domény a kodomény pomocí zápisu $f\colon (X, \leq) \to (Y, \preceq)$.

Definice 1.1.1.5. *Morfismem* mezi uspořádanými množinami $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$ je trojice $f = \langle (X, \leq), (Y, \preceq), \bar{f} \rangle$, kde $\bar{f}$ je zobrazení z X do Y, které je monotonní vůči $\leq$ a $\preceq$. Fakt, že f je morfismem mezi $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$ zapisujeme výrazem $f\colon (X, \leq) \to (Y, \preceq)$ či $(X, \leq) \xrightarrow{f} (Y, \preceq)$.

Je-li $f\colon (X, \leq) \to (Y, \preceq)$, nazýváme uspořádanou množinu $(X, \leq)$ *doménou* f a uspořádanou množinu $(Y, \preceq)$ *kodoménou* f. Doménu a kodoménu morfismu f značíme po řadě $\mathrm{dom}\, f$ a $\mathrm{cod}\, f$.

Příklad 1.1.1.6. Následující 3 morfismy budou hrát v dalším výkladu důležitou roli:

- *Identita* $f(x) = x$ je morfismem na každé uspořádané množině $A = (X, \leq)$; značíme ji 1_A, popř. $1_{(X,\leq)}$; tj. $1_A\colon A \to A$, resp. $1_{(X,\leq)}\colon (X, \leq) \to (X, \leq)$. (Pozor: morfismus, který je identickým zobrazením mezi *různými* uspořádanými množinami s týmž nosičem, zde nemíníme a takto neoznačujeme.)

- *Prázdné zobrazení* $\emptyset$ je morfismem z prázdné uspořádané množiny $(\emptyset, \emptyset)$ do libovolné uspořádané množiny $A = (X, \leq)$. Budeme jej značit $0_A \colon (\emptyset, \emptyset) \to A$.
- (Jednoznačně určené) zobrazení z libovolné uspořádané množiny A do jednoprvkové uspořádané množiny je morfismus, který budeme značit $!_A$.

Značení. Složení zobrazení $f \colon X \to Y$ a $g \colon Y \to Z$, tj. zobrazení přiřazující prvku $x \in X$ prvek $g(f(x)) \in Z$, budeme značit $g \circ f$ či krátce gf. (Pozor na pořadí skládání v tomto značení!) Je tedy $(gf)(x) = g(f(x))$. Nehrozí-li nedorozumění, závorky často vynecháváme a místo $f(x)$ píšeme prostě fx (při skládání tedy gfx).

Pozorování 1.1.1.7. Je-li f monotonní zobrazení z $(X, \leq_1)$ do $(Y, \leq_2)$ a g monotonní zobrazení z $(Y, \leq_2)$ do $(Z, \leq_3)$, pak $g \circ f$ je monotonním zobrazením z $(X, \leq_1)$ do $(Z, \leq_3)$.

Tento fakt motivuje definici skládání morfismů uspořádaných množin. Pozorování 1.1.1.7 zaručuje, že následující definice je korektní, tj. že složením morfismů uspořádaných množin je opět morfismus.

Definice 1.1.1.8. Jsou-li f, g morfismy uspořádaných množin takové, že $\operatorname{dom} g = \operatorname{cod} f$ (tj. f, g jsou *navazující* morfismy), pak jejich *složením* je morfismus gf daný složením monotonních zobrazení f a g, přičemž $\operatorname{dom}(gf) = \operatorname{dom} f$ a $\operatorname{cod}(gf) = \operatorname{cod} g$.

Poznámka. Není-li $\operatorname{dom} g = \operatorname{cod} f$, *není* složení morfismů gf definováno (přestože složení monotonních *zobrazení* g a f množinověteoreticky definováno je – např. může být prázdné).

Pozorování 1.1.1.9. Skládání monotonních zobrazení, jakož i morfismů uspořádaných množin, je asociativní.

Pozorování 1.1.1.10. Pro každý morfismus $f \colon A \to B$ uspořádaných množin platí: $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

Pozorování 1.1.1.9 a 1.1.1.10 jsou důsledkem vlastností skládání jakýchkoli množinových zobrazení. Budou tedy platit nejen pro monotonní zobrazení (či morfismy) mezi uspořádanými množinami, ale pro jakákoli zobrazení zachovávající nějakou strukturu na množinách, čili pro morfismy mezi jakýmkoli druhem matematických struktur. To motivuje definici *kategorie,* kterou formálně vyslovíme později; prozatím vystačíme s následující neformální definicí:

Definice 1.1.1.11. *Kategorií* budeme mínit nějakou třídu *objektů* společně s třídou prvků zvaných *morfismy,* přičemž platí:
- každý morfismus f má jednoznačně určené objekty zvané *doména* a *kodoména,*
- navazující morfismy lze skládat (a výsledkem je opět morfismus s příslušnou doménou a kodoménou danou podle Definice 1.1.1.8),
- skládání morfismů je asociativní
- a ke každému objektu a existuje morfismus zvaný *identita na a,* který se chová jako neutrální prvek vůči skládání s kterýmkoli navazujícím morfismem.

Objekty kategorie jsou v typickém případě matematické struktury nějakého druhu (například uspořádané množiny) a jejími morfismy jsou nějaká zobrazení mezi těmito objekty, která zachovávají jejich strukturu (v našem případě monotonní zobrazení). V takovém případě je jediným netriviálním požadavkem uzavřenost tohoto druhu zobrazení na skládání; ostatní požadavky (asociativita, skládání s identitou) jsou pak obvykle splněny automaticky (neboť jde o zobrazení).

Příklad 1.1.1.12. Antitonní zobrazení (tj. taková, že $f(x) \succeq f(y)$ kdykoli $x \leq y$) nesplňují podmínky na soubor morfismů mezi uspořádanými množinami (přestože v jistém smyslu také přenášejí strukturu uspořádání), neboť nejsou uzavřená na skládání. Uspořádané množiny s antitonními zobrazeními tedy netvoří kategorii. (Intuice, že antitonní zobrazení rovněž přenáši strukturu uspořádání, je dána tím, že jde o *monotonní* zobrazení do *inverzně* uspořádané množiny.)

Poznámka. Mezi antitonní zobrazení navíc ani nepatří identita na více než jednoprvkových uspořádaných množinách, nesplňují tedy ani podmínku existence identického morfismu na každém objektu. (Protože identické zobrazení strukturu na množině vůbec nemění, mělo by být prvkem jakéhokoli souboru zobrazení zachovávajících strukturu.) Tuto podmínku je však u kategorií, jejichž třídu morfismů tvoří nějaká zobrazení mezi matematickými strukturami, možno vždy napravit umělým přidáním všech identit k souboru morfismů, neboť to ostatní podmínky (zejména uzavřenost morfismů na skládání) nemůže poškodit.

Na rozdíl od Příkladu 1.1.1.12 pro antitonní zobrazení, Pozorování 1.1.1.7 naopak zaručuje (spolu s Pozorováními 1.1.1.9 a 1.1.1.10, která jsou však pro zobrazení automatická), že *monotonní* zobrazení (coby morfismy) mezi uspořádanými množinami (coby objekty) kategorii tvoří. Tuto kategorii nazýváme *kategorií uspořádaných množin* a značíme **Pos** (z anglického *poset,* jež je zkratkou z *partially ordered set.*)

Poznámka. Název kategorie by správně měl reflektovat nejen zvolený soubor objektů, nýbrž i morfismů. Správnější by tedy bylo nazývat kategorii **Pos** „kategorie uspořádaných množin a monotonních zobrazení“. Je však běžným zvykem nazývat kategorie především podle třídy objektů (třebaže je to nejednoznačné) a třídu morfismů v názvu neuvádět.

Asociativita skládání navazujících morfismů umožňuje vynechávat závorky v zápisech jako $h \circ (g \circ f)$ či $(hg)f$. Pohodlným způsobem vyznačení návaznosti morfismů $A \xrightarrow{f} B$ a $B \xrightarrow{g} C$ je kombinace těchto zápisů do jednoho diagramu $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Podobným způsobem je možno vyznačovat domény a kodomény většího počtu morfismů, např.:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Řekneme, že takovýto diagram *komutuje,* pokud se v něm libovolné dvě cesty, které vedou mezi týmiž objekty a aspoň jedna z nich je tvořena alespoň dvěma šipkami, skládají na tentýž morfismus.

Příklad 1.1.1.13. Diagram (1.1) je *komutativním čtvercem,* právě když $g \circ f = k \circ h$.

Komutativní diagramy jsou tak stručným grafickým zápisem konjunkce řady tvrzení o doménách a kodoménách v něm vyznačených morfismů a o rovnosti složených morfismů podél jeho cest. (Později v něm různými druhy šipek a jinými symboly budeme vyznačovat i některé další druhy tvrzení. Pojem komutativního diagramu lze v teorii kategorií dále precisifikovat pomocí pojmu funktoru.)

V teorii kategorií hledáme charakterizace vlastností struktur a morfismů pomocí šipek a jejich skládání, bez odvolávek na prvky těchto struktur. Pokud totiž daný pojem dokážeme charakterizovat výhradně pomocí pojmů z definice kategorie, lze tuto charakterizaci vzít jako definici analogického pojmu v *každé* kategorii. Věty dokazatelné výhradně pomocí předpokladů uvedených v definici kategorie pak budou o tomto platit v libovolné kategorii, bez ohledu na to, které konkrétní objekty a morfismy ji tvoří.

Příklad 1.1.1.14. Identita na A je v kategorii **Pos** prvkově definována jako zobrazení 1_A, které každému prvku $x \in \dot{A}$ přiřadí sebe sama: $1_A(x) = x$. Lze ji však v **Pos** charakterizovat také pomocí skládání morfismů, jako *ten jediný* morfismus $h\colon A \to A$ takový, že pro libovolné objekty B, C a libovolné morfismy $f\colon B \to A,\ g\colon A \to C$ platí $h \circ f = f$ a $g \circ h = g$.