

Kurt Gödel: život, výsledky a jejich význam

Libor Běhounek¹

Ústav informatiky Akademie věd České republiky
Pod Vodárenskou věží 2, 182 07 Praha 8

Filozofická fakulta Univerzity Karlovy v Praze
Katedra logiky, Celetná 20, 116 42 Praha 1

behounek@cs.cas.cz

Abstrakt

Kurt Gödel bývá často považován za nejvýznamnějšího logika 20. století, zejména díky svým větám o neúplnosti. Článek podává vedle základních biografických a bibliografických údajů přehled jeho nejdůležitějších výsledků a prací, jimiž zasáhl do matematické logiky a metamatematiky (věty o úplnosti a neúplnosti, nekonečněhodnotovost intuicionistické logiky), teorie množin (nevyvratitelnost hypotézy kontinua a axiomu výběru, axiomatika teorie tříd), filozofie matematiky (Gödelův program a názory prezentované v jeho esejích) a dalších oborů (překvapivé řešení Einsteinových rovnic připouštějící cestování v čase, logická rekonstrukce Anselmova ontologického důkazu boží existence). Zvláštní pozornost je věnována výkladu Gödelových vět o neúplnosti, jejich demytizaci a důsledkům pro informatiku (Turingovy výsledky o algoritmické nerozhodnutelnosti), umělou inteligenci, filosofii a další obory.

1 Život Kurta Gödela

Kurt Gödel se narodil 28. dubna 1906 v Brně jako syn spolumajitele prosperující textilní továrny. V Brně žil až do roku 1923, kdy úspěšně maturoval na zdejším německém gymnáziu.² V následujícím roce se přestěhoval do Vídně a nastoupil ke studiu na Vídeňské univerzitě. Zpočátku nebyl rozhodnut mezi matematikou a teoretickou fyzikou, postupně však převážil jeho zájem o matematiku a logiku. Od roku 1926 byl jako Hahnův velmi nadaný student zván na pravidelné schůzky prestižního Vídeňského kruhu – vedoucí skupiny logického pozitivismu. Přestože filosoficky byl v té době již vyhraněným plato-

nistou, do debat Kruhu nevstupoval a své filosofické přesvědčení, ostře kontrastující s názory Kruhu, si nechával pro sebe.

V roce 1929 studium dokončil odevzdáním disertace, již tvořil důkaz úplnosti predikátové logiky prvního řádu (publikována byla v [Gö1]). Tento výsledek prezentoval v krátkém referátu na významné konferenci o základech matematiky v Královci v říjnu 1930.³ Protože byl výsledek o úplnosti v tehdejší vědeckém kontextu očekávaný, nezbudil referát mezi přítomnými větší rozruch. V plenární diskusi poslední den konference Gödel krátce zmínil, že lze udat příklady pravdivých nedokazatelných vět aritmetiky. Jediný z účastníků, kdo toto oznámení neignoroval, byl John von Neumann: v kuloárech si nechal od Gödela vysvětlit základní myšlenku věty a jejího důkazu, který měl Kurt Gödel zřejmě již několik měsíců hotov, a v Princetonu o ní zpravil své kolegy. Gödel první větu o neúplnosti publikoval následujícího roku 1931 [Gö2] a podal ji jako svou habilitační práci, na jejímž základě se v roce 1933 stal na Vídeňské univerzitě soukromým docentem.

V akademickém roce 1933–34 byl pozván do Princetonu, kde o svých výsledcích přednášel na nově otevřeném Ústavu pro pokročilá studia; zde se také seznámil s Albertem Einsteinem, který sem krátce předtím utekl před nacismem. Po návratu do Vídně se roku 1938 oženil a vzápětí odjel (bez manželky) znovu do Ameriky, kde přednášel o svých výsledcích v teorii množin.

V létě 1939 se vrátil do Vídně, aby zde obhajoval svůj nárok na docenturu, podléhající nyní novým pravidlům nacistického Německa. Na podzim se chtěl vrátit do Princetonu, vyřízení jeho žádosti se však pro jeho naprostou apolitičnost a předchozí styky s židovskými kolegy protahovalo. Gödel se začal obávat odvedení do armády (jednou byl navíc napaden skupinou nacistických výtržníků, kteří si jej spletli se Židem); koncem roku se proto raději rozhodl pro emigraci. Na intervenci amerických kolegů mu bylo na přelomu roku povoleno vycestovat, a to přes Rusko a Japonsko: do Princetonu tak s manžel-

¹ Práce na tomto článku byla částečně podpořena grantem č. GD401/03/H047 Grantové agentury České republiky.

² K českému prostředí zřejmě příliš vřelý vztah neměl (zejména po vzniku Československa, jehož občanem byl v letech 1918–1929): na rozdíl od spolužáků nepoužíval ani zlomky češtiny, a když byla po druhé světové válce vila jeho matky podle československo-rakouské dohody vyvlastněna za desetinu její odhadní ceny, vnímal to jako osobní krivdu ([Go], [Kr]).

³ Přítomni byli Hilbert, Carnap, Heyting, von Neumann a další.

kou dorazil až na jaře 1940. V Princetonu se potom zdržoval až do konce života, nejprve jako dočasný člen Ústavu pro pokročilá studia (s prodlouženou roční smlouvou), od roku 1946 pak jako jeho stálý člen a od roku 1953 konečně jako profesor. Evropu již nikdy nenavštívil; roku 1948 získal americké občanství a v průběhu dalších let čestné doktoráty prestižních amerických univerzit (Harvardovy, Yalovy ad.) a různá jiná ocenění (Einsteinovu cenu, členství v národních akademiích a společnostech aj.).

Gödel žil vždy velmi uzavřeným životem. Společnosti se převážně vyhýbal a byl spíše plachý, v některých směrech však dosti umanutý. Od dětství trpěl neurotickými obtížemi, hypochondrií (po přetřené revmatické horečce ve věku šesti let se po celý život mylně domníval, že má poškozené srdce) a dalšími psychickými poruchami, jež různé okolnosti jeho života postupně prohlubovaly. Mezi prvními dvěma pobyty v Americe prodělal dvojí nervové zhroucení a musel nějaký čas pobývat v sanatoriu. S věkem se jeho uzavřenost zvětšovala a v Princetonu se mimopracovně stýkal jen s několika přáteli – zejména s Einsteinem, po jeho smrti roku 1955 pak hlavně s logiky Hao Wangem a G. Kreiselem, vídeňským ekonomem Morgensternem a nemnoha dalšími; děti neměl. Po roce 1958 přestal své výsledky publikovat, přestože stále pracoval; nevedl ani žádné studenty. Paranoidní strach z otravy jídlem vedl k jeho dlouhodobé podvýživě; během několikaměsíčního pobytu jeho ženy v nemocnici na podzim 1977 pak vyhladověl k naprosté vyčerpanosti, a ani pobyt v nemocnici, kam jej nechala po svém návratu odvézt, jej již nezachránil; zemřel 14. ledna 1978.⁴

2 Gödelovy výsledky a přínos

V této a následující kapitole podáme základní přehled Gödelových výsledků a jejich stručné zhodnocení. Vzhledem k obsáhlosti tématu a stavu jeho prozkoumání může jít pochopitelně pouze o shrnující a přehledový popis; podrobnosti a další informace lze najít v odkazované literatuře. Její výběr se částečně řídil snadnou dostupností pro české a slovenské čtenáře: z velkého množství relevantní literatury proto byly přednostně použity práce vydané česky nebo slovensky a zdroje přístupné na internetu.

2.1 Logika

Nejznámějším Gödelovým výsledkem v logice jsou bezesporu jeho věty o neúplnosti, vnímané často jako ničím nepřekonatelný výkon. I podle Gödelova osobního názoru (citovaného v [Kr]) však bylo v letech 1930–31

⁴ Podrobnější životopisné údaje lze najít např. v [Kr] či [Go].

otázkou měsíců, kdy by na tyto věty narazil někdo jiný.⁵ Jeho výsledky proto není třeba titanizovat;⁶ přišel však s nimi jako první a ve velmi propracované a čisté formě. Vedle vět o neúplnosti podal i první důkaz úplnosti prvořádkové logiky a významně přispěl k teorii i metateorii intuicionistické logiky a matematiky.

2.1.1 Věta o úplnosti prvořádkové logiky

Věta o úplnosti nějakého formálního systému říká, že všechny *platné* formule lze v tomto formálním systému *odvodit*. Pro formální systém logiky prvního řádu jde tedy o větu, že všechny logicky platné formule jazyka prvního řádu jsou dokazatelné (v dané axiomatice této logiky). Dnešní axiomatika prvořádkové logiky byla navržena v roce 1928 v Hilbertově a Ackermannově knize *Grundzüge der theoretischen Logik*. V následujícím roce Gödel kladně vyřešil (v ní formulovaný) problém její úplnosti, neboli dokázal následující větu:

Věta (o úplnosti): Každá tautologie klasické prvořádkové logiky je dokazatelná v Hilbertově–Ackermannově systému axiomů.

Spolu se (snadnou) větou o korektnosti této axiomatiky (jež říká, že dokazatelné jsou v ní *pouze* tautologie prvořádkové logiky) Gödelův výsledek znamená, že pojem logické pravdivosti v jazyce prvního řádu přesně odpovídá jednoduchému pojmu formální („mechanické“) dokazatelnosti v určitém formálním axiomatickém systému.

Význam tohoto výsledku je značný: ukazuje, že pro prvořádková tvrzení lze pojem logické pravdivosti – tedy pravdivosti ve všech (čili nekonečně mnoha) strukturách (i nekonečných) – redukovat na dokazatelnost pomocí mechanické procedury ve finitně zadaném axiomatickém systému. Tato věta se zdála podporovat formalistickou doktrínu Hilbertovy školy, požadující redukovat veškerou matematiku, zabývající se i nekonečnými strukturami, na jednoduché manipulace s konečně zadanými objekty. (Její neproveditelnost ukázaly až věty o neúplnosti.)

Z hlediska obecného dosahu této věty je třeba mít na paměti, že se týká pouze logiky 1. řádu a platí vlastně právě díky omezenosti jejích výrazových prostředků. Jazyk prvořádkové logiky obsahuje vedle výrokových spojek (konjunkce, disjunkce, negace, implikace, ekvivalence) pouze proměnné pro individua nějakého daného

⁵ Šlo tehdy o aktuální témata a lhářovské motivy byly již po čtvrtstoletí předmětem intenzivního zkoumání; Zermelo si patrně byl vět o neúplnosti vágně vědom a výzkumy dalších logiků (Post, Tarski, Skolem) k nim měly tematicky velmi blízko.

⁶ Jak činí např. [Go]; střízlivější pohled nabízejí [Kr] a [Kl].

univerza, jména pro predikáty nějakého daného jazyka⁷ a možnost kvantifikace přes individuové proměnné. Na rozdíl od logiky druhého a vyšších řádů neobsahuje *proměnné* (nýbrž jen jména) pro predikáty a funktoři, a neumožňuje tedy přes ně ani kvantifikovat.

Unární predikáty označují vlastnosti individuí, reprezentované podmnožinami univerza; binární a více-ární predikáty vyjadřují vztahy mezi těmito individuy a jsou reprezentovány relacemi příslušné arity na univerzu. V logice 1. řádu tedy můžeme mluvit o *jednotlivých* predikátech, pro něž máme v daném jazyce jména – např. v jazyce aritmetiky o predikátu „být menší“ $<$. Nemůžeme však přes predikáty (neboli podmnožiny a relace) kvantifikovat. V prvořádkovém jazyce tedy nelze vyjádřit ani tak důležité věty jako *Každá množina přirozených čísel má nejmenší prvek* či *Každá omezená množina reálných čísel má supremum*. Tyto věty obsahují kvantifikaci přes podmnožiny, jsou tedy druhořádkové.

Úplnost prvořádkové logiky tedy neznamená redukci matematické pravdivosti na dokazatelnost, neboť mnoho důležitých matematických vět je druhořádkových. Gödelovy věty o neúplnosti ukazují, že tato redukce obecně skutečně není možná.

2.1.2 Věty o neúplnosti

Tzv. první Gödelova věta o neúplnosti konstatuje neúplnost určitého druhu formálních teorií. V jedné z nejstručnějších verzí může být formulována takto:

Věta (první o neúplnosti): Každá bezesporná rekurzivně axiomatizovaná teorie obsahující Peanovu aritmetiku je neúplná.

Peanova aritmetika PA je teorií obsahující tři axiomy pro funkci následníka neboli přičtení jedničky (nula není následníkem žádného čísla, každé nenulové číslo je následníkem nějakého čísla, a čísla jsou si rovna, jen když jsou si rovni jejich následníci); rekurzivní definice sčítání pomocí následníka ($x+0 = x$, $x+\text{násl}(y) = \text{násl}(x+y)$) a násobení pomocí sčítání ($x\cdot 0 = 0$, $x\cdot \text{násl}(y) = x\cdot y + x$); a axiom indukce pro každou prvořádkovou aritmetickou vlastnost φ (tedy tvrzení, že má-li vlastnost φ nula a s každým číslem i jeho následník, pak ji už mají všechna čísla).⁸

⁷ Případně i pro funktoři; protože však mohou být definovány pomocí predikátů, nechme je, stejně jako Gödel, pro jednoduchost stranou.

⁸ Modifikaci důkazu lze získat několik variant Gödelových vět, lišících se silou předpokladů a závěru; první věta o neúplnosti například platí již pro tzv. Robinsonovu aritmetiku, tj. výše uvedenou axiomatiku bez axiomů indukce. Rozbor těchto variant však není předmětem tohoto článku; detaily lze nalézt v [So1], [Šv] či [Po]. Gödelova původní formulace používala místo be-

Vlastnost rekurzivnosti lze považovat za ekvivalentní algoritmizovatelnosti pomocí Turingova stroje (v praxi tedy počítače). Teorie je rekurzivně axiomatizovaná, má-li rekurzivní sadu axiomů a odvozovacích pravidel. Pouze takové teorie lze rozumně chápat jako „finitně“ zadané, neboť pouze u nich máme konečný algoritmus, jak poznat jejich axiomy.

Neúplnost teorie znamená, že existuje tvrzení, které v ní nelze ani dokázat ani vyvrátit. Je-li daná teorie navíc korektní (tedy jsou-li v ní dokazatelné pouze pravdivé věty aritmetiky), pak existují *pravdivá* aritmetická tvrzení, která v ní nejsou dokazatelná. V obou případech Gödelův důkaz umožňuje tato tvrzení přímo sestrojít, tj. ukázat konkrétní takovou formuli (nazývanou *Gödelova sentence*).

Myšlenka důkazu spočívá v zakódování syntaxe formální teorie pomocí čísel. Každé formuli je tak algoritmicky přiřazen její číselný kód, tzv. Gödelovo číslo. Tím jsou syntaktické vlastnosti vyjádřeny v jazyce aritmetiky a lze o nich *v aritmetice* dokazovat potřebná tvrzení. Předpoklad úplnosti teorie lze pak obratem podobným Cantorově diagonální metodě přivést ke sporu. Přes jasnou základní myšlenku je provedení všech detailů důkazu poměrně pracné a vyžaduje značné množství definovaných pojmů a předběžných lemmat.⁹

V důsledku Gödelovy věty je značná část zajímavých dostatečně silných matematických teorií principiálně neúplná. Věta tvrdí, že teorie zůstane neúplnou, ať ji rozšíříme jakýmkoli *rozumným* způsobem – tj. tak, aby zůstala bezesporná (spor by teorií zcela znehodnotoval, neboť lze přes něj odvodit cokoliv) a rekurzivně axiomatizovaná (abychom byli schopni algoritmicky poznat její axiomy).

Důsledkem vhodného tvaru první Gödelovy věty je tzv. druhá věta o neúplnosti, formulovatelná např. takto:¹⁰

Věta (druhá o neúplnosti): Žádná bezesporná rekurzivně axiomatizovaná teorie T obsahující Peanovu aritmetiku nedokazuje formuli $\text{Con}(T)$ vyjadřující její formální bezespornost.

Rigorózní výklad formule $\text{Con}(T)$ a přesná formulace souvislosti její dokazatelnosti s bezesporností teorie T přesahuje rámec tohoto článku.¹¹ Lze ji však v určitém

zespornosti o něco silnější předpoklad tzv. ω -bezespornosti, na pouhou bezespornost zesílil větu J. B. Rosser.

⁹ Omezený rozsah tohoto článku nedovoluje uvést další podrobnosti; pro detaily viz česky [So1] či [Šv], na webu např. [Po] či přímo [Gö2]; přehled důkazu lze najít v [KI] či [W1], jeho populární výklad např. v [Go], [NN], [Ho], [Sm1], [Sm2].

¹⁰ Gödelova původní formulace se opět v detailech liší.

¹¹ Netriviálnost tohoto vztahu je vidět i z toho, že dle druhé věty o neúplnosti je teorie $PA + \neg \text{Con}(PA)$, tedy Peanova aritmetika s předpokladem své vlastní formální *spornosti*, bezesporná.

smyslu chápat jako formální protějšek bezspornosti teorie T a větu interpretovat tak, že v dostatečně silné bezsporné rekurzivní teorii nelze dokázat její vlastní bezspornost. Výkladu důsledků a významu obou vět o neúplnosti věnujeme samostatnou kap. 3.

2.1.3 Nekonečněhodnotovost intuicionistické logiky

Na počátku dvacátého století matematik L. E. J. Brouwer vystoupil s požadavkem konstruktivního vedení důkazů v matematice. Jeho přístup, nazvaný intuicionismus, získal v první polovině dvacátého století (jakožto jedna z reakcí na krizi v základech matematiky způsobenou paradoxy teorie množin a infinitní matematiky) poměrně velký ohlas. Intuicionistická matematika nepřipouští důkazy sporem, neuznává zákon dvojité negace $A \leftrightarrow \neg\neg A$ ani zákon vyloučení třetího $A \vee \neg A$ apod. Logiku používanou v intuicionistické matematice axiomatizoval koncem dvacátých let A. Heyting. Klasická výroková logika je dvouhodnotová – lze ji zavést pomocí pravdivostních tabulek se dvěma hodnotami 0 a 1. Několik let nebylo jasné, zda nelze podobně chápat intuicionistickou logiku jako troj- či vícehodnotovou. Bylo nalezeno několik sad vícehodnotových pravdivostních tabulek, vůči nimž je intuicionistická logika korektní (tj. při počítání podle těchto tabulek vycházejí intuicionisticky platné formule jako pravdivé). Vždy se však ukázalo, že není vůči nim úplná (tabulky „přegenerovaly“ – byly podle nich pravdivé i některé intuicionisticky neplatné formule). Ve svém dvoustránkovém článku [Gö3] Gödel demonstroval marnost těchto snah – pomocí vtipného argumentu dokázal, že intuicionistická logika nemůže být zadána pomocí žádné pravdivostní tabulky s konečně mnoha hodnotami.

Pro účely důkazu tohoto tvrzení Gödel přidal k intuicionistické logice axiom $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$. Přestože Gödel výslednou logiku ani nepojmenoval a nijak ji dále nepoužil, byla to první zmínka o důležitém logickém systému, který později důkladně prozkoumal M. Dummett. Po vzniku fuzzy logiky se ukázalo, že toto rozšíření intuicionistické logiky je zároveň jednou z nejdůležitějších fuzzy logik, v níž je konjunkce realizována jako minimum pravdivostních hodnot obou argumentů v intervalu $[0, 1]$. Vedle důkazu nekonečněhodnotovosti intuicionistické logiky se tak Gödel stal maně objevitelem jedné z nejdůležitějších fuzzy logik, dnes zvané Gödelova (či Gödel-Dummettova).

2.2 Teorie množin

Teorii množin je spolu s logikou součástí „základů matematiky“ a zejména v první polovině dvacátého století ji

bylo možno považovat za obor „sousedící“ s logikou. Je proto přirozené, že Gödel byl aktivní i v něm.

2.2.1 Nevyvratitelnost hypotézy kontinua a axiomu výběru

V roce 1938 Gödel jedním tahem z poloviny vyřešil dva dlouho otevřené významné problémy v teorii množin:

Koncem 19. století zakladatel teorie množin Georg Cantor vyslovil hypotézu, že každá podmnožina reálných čísel je buďto spočetná (tj. existuje její očíslování přirozenými čísly), nebo má mohutnost kontinua (tj. existuje její vzájemně jednoznačné zobrazení na množinu \mathbb{R} všech reálných čísel); jiné podmnožiny \mathbb{R} totiž nemohl nalézt. Přes několik částečných výsledků potvrzujících, že podmnožiny \mathbb{R} nejružnějších vlastností jeho hypotézu splňují, obecný důkaz Cantor ani nikdo jiný nebyl schopen podat. Tato *hypotéza kontinua*, v kardinální aritmetice zapsatelná jako $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, byla zobecněna na ještě silnější hypotézu stanovující $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ pro každé ordinální číslo α – tedy tvrzení, že mezi mohutnostmi žádné nekonečné množiny a její potence (množiny všech jejích podmnožin) již nejsou žádné další mohutnosti. Ani tuto silnější hypotézu (GCH) se nikomu nepodařilo vyvrátit ani dokázat.

V souvislosti s axiomatizací teorie množin (v reakci na nalezené paradoxy) na počátku dvacátého století se ukázalo, že mnoho důkazů v matematice používá obrat, kdy se současně vybere nekonečně mnoho nespecifikovaných prvků. Předpoklad, že to lze, precizovaný a formulovaný jako axiom výběru (AC), zní v jedné ze svých mnoha ekvivalentních podob takto: ke každé množině A neprázdných množin existuje množina, která má s každou množinou z A právě jednoprvkový průnik. Bez axiomu výběru nebylo možno dokázat mnoho důležitých výsledků, mimo jiné i tak „očividná“ tvrzení, jako že kartézský součin neprázdných množin je neprázdný; jeho nekonstruktivní povaha – nedává totiž žádný předpis, jak výběrovou množinu *sestrojit* – jej však činila pochybným nejen v očích intuicionistů. Velkou snahou matematiků po více než tři desítky let proto bylo buď tento axiom dokázat z ostatních axiomů teorie množin (čímž by byl ospravedlněn), nebo ukázat jeho nezávislost na ostatních axiomech teorie množin (čímž by byl alespoň vyjasněn jeho status, podobně jako u pátého Eukleidova postulátu).

Gödelův výsledek oznámený v [Gö4] používá konstrukci popisující tzv. *konstruovatelné množiny*.¹² Gödel

¹² Tyto množiny lze charakterizovat jako počítatelné nekonečnými Turingovými stroji v nekonečném čase (kde páska i taktly mohou mít libovolný ordinální typ). Gödelova definice však byla jiná a opírala se o ordinálně iterovanou definovatelnost pomocí formulí.

ukázal, že univerzum všech konstruovatelných množin (označované L) splňuje všechny axiomy teorie množin, a navíc v něm platí jak axiom výběru, tak i zobecněná Cantorova hypotéza. Ukázal tedy, že AC i GCH jsou s obvyklými Zermelovými–Fraenkelovými axiomy teorie množin konzistentní, nedají se tedy pomocí nich vyvrátit. Druhou polovinu důkazu jejich nezávislosti, tj. jejich nedokazatelnost, ukázal v šedesátých letech P. Cohen (a nezávisle na něm P. Vopěnka).

Konstrukce univerza L hrála pak důležitou roli i v dalším vývoji teorie množin. Toto univerzum je prototypem jejich tzv. *vnitřních modelů* (vnitřních proto, že L je poduniverzem univerza *všech* množin, označovaného V). Pomocí konstrukcí vnitřních modelů lze ukázat řadu dalších výsledků o nedokazatelnosti či nevyvrátitelnosti některých principů teorie množin. Velmi podrobný popis Gödelovy konstrukce včetně všech důkazů a aplikací těchto metod lze najít v [So2]; dobrý celkový obrázek lze získat i z přehledu v [BŠ], [Kr] či [Kl].

Přijetí předpokladu, že každá množina je konstruovatelná (tedy axiomu $V=L$), řeší nejenom problém platnosti AC a GCH , ale i mnoho dalších problémů teorie množin. Gödel sám ihned ukázal, že z něj plynou odpovědi na některé tehdy otevřené problémy deskriptivní teorie množin (zda existují množiny reálných čísel s jistými vlastnostmi). Protože je však univerzum L na množiny velice „chudé“ (v jistém smyslu nejchudší možné), není axiom $V=L$ v teorii množin běžně přijímán a L je obvykle chápáno jen jako velmi důležitý vnitřní model. Takto L chápal i sám Gödel; přes svůj výsledek o její nevyvrátitelnosti byl totiž přesvědčen, že Cantorova hypotéza ve skutečnosti neplatí.¹³

2.2.2 Gödelova–Bernaysova–von Neumannova axiomatizace teorie tříd

Vedle tohoto významného příspěvku žije Gödelovo jméno v každodenním hovoru množinových teoretiků i v názvu jedné z nejvýznamnějších axiomatik teorie množin, označované jako Gödelova–Bernaysova, GB (též NBG , von Neumann–Bernays–Gödel). Na rozdíl od staršího Zermelova–Fraenkelova systému ZF jsou jeho objekty nikoli množiny, nýbrž tzv. *třídy*. Množiny jsou definovány jako ty třídy, které jsou prvky jiných tříd. Množinami v zásadě mohou být jen „malé“ třídy; tím jsou ošetřeny paradoxy teorie množin propukající jinak u „nadměrně velkých“ tříd, jako je třída všech množin V . Díky opatrné formulaci schématu axiomů definování tříd, požadující kvantifikaci pouze přes *množiny* (nikoli třídy), je tato teorie stejně silná jako ZF a lze ji chápat jako její

¹³ Tento jeho názor souvisí s jeho platonistickým přesvědčením ve filosofii matematiky, o němž pojednává sekce 2.3.1.

notační variantu (třídy lze zavést v ZF jako zkratky za formule, viz [So2] či [BŠ]); jejich rozdíly však hrají roli v metamatematických zkoumáních: GB je např., narozdíl od ZF , konečně axiomatizovatelná. Podrobný popis teorie GB a jejích vlastností je uveden v [So2] (pro stručný přehled viz např. [Wi1], heslo „NBG“).

2.3 Fyzika a filosofie

Dalším oborem, do něž Gödel – sice jen jednou, zato však významně – zasáhl, byla obecná teorie relativity. Celý život se rovněž zabýval problémy filosofie matematiky; jeho eseje o ní však byly publikovány až z jeho pozůstalosti. Vedle toho se široké publicitě teší jeho spíše kuriózní verze důkazu boží existence. Těmito tématy proto přehled jeho hlavních výsledků uzavřeme.

2.3.1 Filosofie matematiky: Gödelův program

Gödel byl od svých studií přesvědčeným platonistickým realistou. Ve filosofii matematiky tento názor znamená přesvědčení, že matematické objekty existují nezávisle na našich axiomech a metodách: ty je nevytvářejí, jen popisují. I když tedy podle Gödelových vět existují tvrzení, která daným formálním aparátem nelze rozhodnout, z objektivní existence matematické reality pro platonistu vyplývá, že tato nezávislá tvrzení jsou přesto buď pravdivá, nebo nepravdivá. (V tom se liší např. od intuicionisty, podle něž tvrzení nemají pravdivostní hodnotu, dokud je nedokážeme nebo nevyvrátíme.) U složitějších nezávislých tvrzení však nemá platonista žádné vodítko, zda jsou (přes svoji nedokazatelnost a nevyvrátitelnost) pravdivá či nikoli – kromě matematické intuice.

Gödel (svoji) matematickou intuici jako takové vodítko bral velmi vážně.¹⁴ Kupříkladu Cantorovu hypotézu, jejíž nevyvrátitelnost sám dokázal, považoval za nepravdivou. Jako obecný princip, který by podle něj měl rozhodnout „skutečnou pravdivost“ všech podobných nezávislých tvrzení, navrhoval postulování stále větších a větších kardinálních čísel.

Jak ukázal již Cantor, existuje nekonečné množství různých mohutností nekonečných množin. Tyto mohutnosti, označované kardinálními čísly, jsou (za předpokladu axiomu výběru) lineárně uspořádány a k větším kardinálitám lze přejít operacemi potence či sjednocení. Tzv. *nedosažitelné kardinály* jsou (volně řečeno) ta kardinální čísla, k nimž se od menších nelze pomocí potence a sjednocení dostat. Jejich existence není z axiomů teorie mno-

¹⁴ Podle některých zmínek měl pocit, že matematické univerzum vnitřním zrakem přímo nahlíží.

žin dokazatelná¹⁵ a lze ji jediň postulovat. Postulátem tohoto druhu je již sám axiom nekonečna, zaručující existenci nekonečné spočetné množiny: ke spočetnému nekonečnu se rovněž operacemi sjednocení a potence nelze dostat od menších – konečných – množin. Konečné množiny tvoří soběstačné univerzum teorie množin bez axiomu nekonečna; ten teprve zaručuje, že toto uzavřené univerzum konečných množin „překročíme“. Podobný postulát lze přijmout i pro překročení uzavřeného univerza množin menších než nedosažitelný kardinál. Matematici tyto postuláty obvykle považují za přijatelné: rozšiřují totiž univerzum množin přirozeným způsobem směrem k větším velikostem. Předpoklad existence vhodného velkého kardinálu pak často řeší jinak nerozhodnutelné problémy teorie množin.

Gödel rovněž považoval toto rozšiřování za přirozené: „skutečné“ univerzum množin totiž podle jeho představ není nijak omezeno – ani kardinálem, jehož existenci naším (pouhým) formalismem nelze dokázat. Byl tedy pro zesilování teorie množin jakýmkoliv prodlužováním hierarchie kardinálů.¹⁶ Takovýmto prodlužováním kardinálit nade všechny meze měla být podle něj nakonec rozhodnuta všechna důležitá nerozhodnutelná tvrzení teorie množin.¹⁷

Tato strategie rozhodování nezávislých tvrzení je známa jako *Gödelův program*.¹⁸ Přestože se s jeho pomocí skutečně dá mnoho nezávislých tvrzení rozhodnout, jsou indicie, že u některých tvrzení postulování sebevětšího kardinálu nepomůže (jedním z nich je právě Cantorova hypotéza kontinua). V současné době se tedy Gödelův program považuje pro rozhodnutí všech nezávislých tvrzení za nedostatečný.

2.3.2 Rekonstrukce ontologického důkazu boží existence

Gödel se vždy snažil pracovat na takových problémech, které mají filosofický přesah. V době kolem roku 1970 jeho kolegové věděli, že pracuje na formálním důkazu existence boží. V jeho pozůstalosti se skutečně list papíru s takovým důkazem našel. Jedná se o formalizaci Leibni-

¹⁵ Z existence nedosažitelného kardinálu totiž vyplývá existence modelu teorie množin, tedy její bezspornost; a ta podle druhé Gödelovy věty není v teorii množin dokazatelná.

¹⁶ To je i důvod, proč nepovažoval za přijatelný axiom $V=L$: existence tzv. měřitelného kardinálu totiž vynucuje existenci nekonstruovatelných množin, tj. $V \neq L$. Proto ani platnost GCH v L pro něj nebyla známkou její pravdivosti.

¹⁷ K tomuto přesvědčení byl přiveden tím, že tyto předpoklady řešily nezávislá tvrzení daná jeho větami o neúplnosti – Gödelovu sentenci a formální bezspornost teorie; toto pozorování pak extrapoloval na všechna ostatní tvrzení.

¹⁸ Viz [Gö6], [Fe] či [Kr].

zovy varianty¹⁹ Anselmova ontologického důkazu v modální logice S5 druhého řádu.

Ve velmi stručné formulaci zní Anselmův argument takto: bůh, jakožto nejdokonalejší bytost, má z definice všechny přednosti; pro takovou bytost je existence jistě předností – musí ji tedy mít. Gödel analyzoval tento důkaz prostředky moderní logiky, aby našel jeho přesnou strukturu a odhalil potřebné předpoklady.

Formální důkaz nalezený v pozůstalosti je velmi stručný, nekomentovaný, a má některé nežádoucí důsledky.²⁰ Od jeho publikace v r. 1987 byl proto řadou autorů znovu studován, rekonstruován a opravován – ze slovenských a českých zejména P. Zlatošem [Z12] a P. Hájkem [Há].

Na rozdíl od populárních představ, Gödelův důkaz pochopitelně není žádným nepochybným důkazem boží existence. Je pouze formální rekonstrukcí a analýzou po staletí známého ontologického důkazu, vůči němuž lze vznášet celou řadu námitek. Gödelem izolované a explicitně uvedené formální předpoklady navíc ukazují, že jejich přijetí je značně problematické, a odhalují tak de facto především slabiny „důkazu“.²¹

2.3.3 Gödelův model vesmíru

Známým Gödelovým výsledkem je rovněž jeho překvapivě řešení Einsteinových rovnic pole dávající kosmologický model, v němž je čas cyklický a jenž umožňuje fyzikou cestou v prostoru dosáhnout libovolných časoprostorových souřadnic – tedy i cestování v čase do minulosti. Gödel teoretické fyzice dobře rozuměl (začal ji původně studovat společně s matematikou); jeho přátelství s Einsteinem v Princetonu a jeho snaha pracovat na filosoficky relevantních matematických problémech zřejmě přispěly k hledání takto neobvyklého řešení rovnic obecné teorie relativity.

Gödelovo řešení se týká vesmíru s pečlivě zvolenou nenulovou kosmologickou konstantou, v němž jsou částice „prachu“ (což mohou být například galaxie) v určitém rotačním pohybu. Následkem toho je jeho geometrie uzavřena do sebe takovým způsobem, že obsahuje uzavřené časopodobné křivky; to vede k popsáním efektům.²²

Článek [Gö5] s tímto kosmologickým modelem Gödel napsal k Einsteinovým sedmdesátinám v roce 1949. Einsteina existence takových modelů jeho vlastní teorie znepokojila a soudil, že nebudou fyzikálně možné. Gödel byl však svým řešením natolik zaujat, že se zajímal o to, zda

¹⁹ Gödel Leibnizovy spisy velmi podrobně studoval, byl to jeho oblíbený autor.

²⁰ Např. tzv. kolaps modalit – jeho předpoklady způsobující, že není rozdíl mezi A a *nutně* A .

²¹ Diskutabilní jsou zde již axiomy modální logiky S5, zejména axiom „je-li možné, že *nutně* A , pak *nutně* A “.

²² Podrobnosti lze najít ve [W11] či přímo v [Gö5].

v reálném vesmíru existuje preferovaný smysl rotace galaxií. Gödelovo řešení bylo prvním z širší třídy později nalezených řešení s uzavřenými časupodobnými křivkami; všechna jsou však neslučitelná s pozorovanými vlastnostmi vesmíru (Gödelův vesmír například nemá Hubblovu expanzi).

3 K významu vět o neúplnosti

Stručné zhodnocení většiny Gödelových nejdůležitějších a neznámějších výsledků jsme provedli přímo u jejich popisu v předchozí kapitole. Zde se budeme podrobněji zabývat významem jeho vět o neúplnosti, zejména z hlediska jejich filosofických interpretací. Zvláště přihlídneme k jejich případným důsledkům v informatice a umělé inteligenci.

3.1 Důsledky vět o neúplnosti v metamatematice a informatice

Principiální neúplnost dostatečně silných teorií u laiků obvykle vyvolává údiv. Z určitého podstatného hlediska však věty o neúplnosti příliš překvapivé nejsou; překvapivá je z tohoto hlediska naopak věta o *úplnosti*. Ta říká, že logickou platnost prvořákových formulí lze popsat konečnou mechanickou aplikací konečných pravidel; tedy že naše omezené *konečné* prostředky kupodivu plně popisují *celou* nekonečnou třídu *i nekonečných* matematických struktur z hlediska prvořákové platnosti. Naopak věty o neúplnosti říkají, že určitou konkrétní nekonečnou matematickou strukturu – přirozená čísla – našimi konečnými prostředky rekursivních teorií nepopíšeme. Právě proto, že je tato struktura nekonečná, nedá se ani příliš očekávat, že to půjde – bylo by *překvapivé*, kdyby to bylo možné.²³

Proč tedy věty o neúplnosti (a nikoli věta o úplnosti) vzbudily takový ohlas, jemuž se u laické veřejnosti těší dodnes? – Bylo to dáno zejména historickými okolnostmi. Snaha o zabezpečení matematiky pracující s nekonečnem (zejména matematické analýzy a teorie množin) proti paradoxům a mylným intuicím vedla na počátku dvacátého století k programu její formalizace – popisu „podezřelých“ tvrzení o nekonečných strukturách „solidními“ finitními metodami axiomatických systémů v rámci nedávno vzniklé formální logiky. Hlavním proponentem tohoto přístupu byl Hilbert, který sám takto formalizoval geo-

²³ Jak trefně poznamenává Kreisel v [Kr], o 50 let dříve by veškerou slávu sklídila věta o úplnosti, zatímco věty o neúplnosti by pouze potvrdily původně převažující mínění, že aritmetika je na logiku neredukovatelná – už proto, že diofantické rovnice některých tvarů jsou velmi obtížné a těžko si představit, že by šly řešit mechanicky.

metrii. Jedním z hlavních cílů Hilbertova programu bylo ukázat, že infinitní metody jsou redukovatelné na finitní – zejména že jejich (nejistou) bezspornost lze prokázat ryze finitními metodami. Za finitní oblast par excellence a jednu z nejjednodušších matematických disciplin se považovala (peanovská) aritmetika; jedním z hlavních cílů se tedy stalo ukázat bezspornost teorie množin (a díky ní i dalších oborů infinitní matematiky) právě pomocí aritmetiky. Gödelovy věty o neúplnosti však možnost dosažení tohoto cíle vyvrátily.

Překvapení z Gödelových vět bylo o to větší, že předchozí vývoj (kupodivu) nasvědčoval proveditelnosti Hilbertova plánu: vedle geometrie bylo krátce předtím formalizováno i několik dalších teorií (např. teorie reálných čísel) a ukázána úplnost těchto formalizací. Sama Gödelova věta o úplnosti do tohoto programu zcela zapadala (proto ani nevzbudila velkou pozornost). I v případě aritmetiky samotné již existovaly indicie pro její úplnost – byla dokázána úplnost peanovské aritmetiky bez operace násobení (tzv. Presburgerova aritmetika) a jen se čekalo, kdy někdo vyřeší problém úplnosti aritmetiky i s násobením. V této celkem oprávněně optimistické atmosféře pak Gödel vyvrátil jak úplnou axiomatizovatelnost aritmetiky, tak možnost prokázání bezspornosti infinitní matematiky finitními prostředky (neboť podle jeho druhé věty nelze v „bezpečně bezsporné“ Peanově aritmetice prokázat ani bezspornost jí samotné, natož silnější teorie množin).²⁴

Hlavním důsledkem Gödelových vět tedy bylo vyvrácení původní verze Hilbertova programu, jež se díky nim ukázala přece jen jako příliš naivní. Proveditelné jsou tak jen značně oslabené verze tohoto programu (např. dokazovat lze pouze *relativní* bezspornost teorií vůči sobě navzájem apod.). Vedle opravy základního obrazu filosofie matematiky mají však Gödelovy věty v metamatematice i technický význam: využívá je např. demonstrace nedokazatelnosti existence nedosažitelných kardinálů v ZF (viz pozn. 15) či důkaz nemožnosti teorii ZF konečně axiomatizovat; podobně se jejich prostřednictvím dá ukázat prvořáková nedefinovatelnost některých struktur v určitých teoriích.²⁵

²⁴ Prokázání bezspornosti teorie v ní samé pochopitelně její bezspornost nijak neřeší, neboť bude-li sporná, dokáže svoji bezspornost také (protože dokáže cokoli). I proto Gödel sám svoji druhou větu považoval spíše za hříčku než významný důsledek. Význam má ale dokazování bezspornosti silnější teorie ve slabší, a na tento případ se jeho věta vztahuje také. Za zmínku snad stojí, že nedávno byly objeveny korektní aritmetické teorie, slabší než PA, které svou vlastní bezspornost dokazují (neumějí však např. dokázat, že součin je definován pro všechny dvojice čísel), viz [Wi2].

²⁵ Např. přirozených čísel v prvořákové teorii reálných čísel. Ta je totiž úplná, a prvořáková definovatelnost přirozených čísel

Pojem rekurzivní funkce, který Gödel pro účely svého důkazu v aritmetice přesně definoval (intuitivně byl používán již dříve), formálně zachycuje její principiální algoritmickou počitatelnost. Metody použité v důkazu našly proto později značné uplatnění v teorii algoritmů a informatice. Z hlediska algoritmizovatelnosti rozpracoval gödelovské metody koncem 30. let Alan Turing (viz zvl. [Tu]).²⁶ Pomocí výpočetního modelu Turingova stroje bylo možno dát pojmu rekurzivní funkce ryze algoritmický charakter a ukázat výpočetní ekvivalenty Gödelových vět.²⁷ Vedle neúplnosti matematických teorií tak byla (Turingem, Churchem a dalšími) ukázána algoritmická *nerozhodnutelnost* některých úloh – neexistence algoritmu řešícího takovou úlohu obecně, pro každý vstup. V oblasti metamatematiky jde zejména o nerozhodnutelnost aritmetiky a dalších formálních teorií (např. teorie grup, okruhů ad.), včetně samotné prvořákové logiky.²⁸ Rozpracování gödelovských metod vedlo i např. k negativnímu řešení 10. Hilbertova problému, v němž Hilbert žádal mechanickou metodu rozpoznání řešitelnosti diofantických rovnic. Nejznámější aplikací v informatice je věta (dokázaná již v [Tu]) o algoritmické neřešitelnosti problému zastavení, tedy neexistence programu, který by pro každý program a jeho vstupní data rozpoznal, zda se na nich zastaví, nebo zacyklí. Podobnými obraty je možno ukázat algoritmickou neřešitelnost řady dalších úloh.

Věty o neúplnosti a nerozhodnutelnosti jsou ve všech těchto oblastech bezesporu významnými *výsledky*; za ještě důležitější je ale možno považovat *metody*, které do metamatematiky, teorie modelů i teorie rekurze přinesly.

3.2 Chybné interpretace Gödelových vět

Gödelovy věty bývají velmi často chybně vykládány, obvykle v důsledku neporozumění či přehlédnutí role jejich premis; jejich význam mimo metamatematiku tak bývá značně přeceňován. Naznačíme zde důvody, proč jsou

v ní by měla za důsledek i úplnost aritmetiky. Přirozená čísla tak lze v rámci reálných definovat pouze *druhořádovou* vlastností, např. archimedovskostí.

²⁶ Turing se s Gödelovými výsledky seznámil v Princetonu, kde pobýval v době mezi prvními dvěma návštěvami Gödelovými. Ačkoliv se spolu neseťkali, Gödel si Turingových výsledků a jeho alternativního způsobu rozpracování svých metod velmi cenil.

²⁷ Gödelovu triku s aritmetickým kódováním syntaxe v nich např. odpovídá simulace Turingova stroje na univerzálním Turingově stroji – interpreteru.

²⁸ Ta, ač je *úplná*, je *nerozhodnutelná* – každá tautologie je v ní sice dokazatelná, ale neexistuje algoritmus, který by po konečném počtu kroků o každé formulí řekl, zda je tautologií či nikoli. Řečeno jazykem teorie rekurze, množina všech tautologií je sice rekurzivně spočetná, není však rekurzivní.

zejména jejich interpretace pro přírodní vědy a pro filosofii myslí ve většině případů zcela nepřiměřené a uvedeme na pravou míru několik nejčastějších konkrétních nesprávných interpretací Gödelových vět.

Obvyklou chybou laických interpretací obou vět je jejich aplikace na situace, kterých se netýkají. Jedním z nejvulgárnějších příkladů jsou tvrzení typu: *Jak rigorózně ukázal Gödel, Bible je buďto neúplná, nebo sporná*. Protože Bible je jen sotva rekurzivní teorií obsahující Peanovu aritmetiku, věta o neúplnosti o jejich formálních vlastnostech nemluví. Jistěže Bible je v běžném slova smyslu neúplná²⁹ a snadno najdeme libovolné množství tvrzení takových, že z Bible nevyplývá ani jejich pravdivost ani nepravdivost; zjevně to však není v důsledku Gödelových vět.

Pochybenost tohoto argumentu je sice zjevná, jeho sofistikovanější podoby však lze často potkat v oblasti metodologie přírodních věd: jejich argumentace obvykle směřuje k nutné neúplnosti přírodovědných teorií v důsledku Gödelových vět.³⁰ Význam případné formální neúplnosti jejich matematické stránky je však zcela marginální ve srovnání s principiální nejistotou jejich správnosti danou *induktivní* metodou jejich ověřování. Neúplnost jejich matematické stránky se týká pouze jejich idealizované extrapolace do nekonečna, zatímco reálně jsou tyto teorie založeny jen na omezeném počtu pozorování a omezených výsecích reality.

Proponenti těchto interpretací rovněž často přehlíží fakt, že ne každá teorie, která pracuje s čísly, je neúplná. Mnoho fyzikálních teorií ve skutečnosti vystačí s elementární teorií *reálných* či komplexních čísel, které jsou *úplné*. A i v těch fyzikálních teoriích, které (např. kvůli počítání nějakých předmětů) potřebují definovat aritmetiku právě všech *přirozených* čísel, mají obvykle jakýkoli fyzikální význam přirozená čísla pouze po nějakou, třeba nepředstavitelně velkou, přesto však konečnou mez,³¹ a aritmetika omezená libovolně velkým, ale *konečným* přirozeným číslem je (triviálně) rozhodnutelná.³²

Právě fakt, že neúplnost se týká pouze ideálních, nekonečných matematických struktur, její aplikovatelnost

²⁹ Nárok na deduktivní úplnost si ostatně ani neklade.

³⁰ Ilustrativním příkladem je osobní výpověď fyzika Jakiho [Ja], jenž líčí, jak Gell-Manna přesvědčoval o nemožnosti finální fyzikální teorie v důsledku Gödelových vět.

³¹ Např. mez $\alpha = 10^{(10^{(10^{78})})}$, což nepředstavitelněkrát přesahuje nejen počet částic v pozorovatelném vesmíru, ale celkem jakýkoli rozumně myslitelný reálně existující počet; a je-li snad tato mez pro některé účely stále příliš malá, lze použít nějakou ještě větší.

³² Neúplnost aritmetiky se týká jen tvrzení typu *Pro všechna přirozená čísla platí ...* a složitějších; nikoli např. tvrzení typu $7+5=12$ či *Pro všechna $x < 10^{78}$ platí ...* (bez neomezených kvantifikátorů).

v situacích týkajících se reálného světa prakticky vylučuje. Gödelovy věty tak ukazují pouze principiální nemožnost některých *idealizovaných* konstrukcí, jako byl Hilbertův program (týkající se ideální formalizace ideální matematiky) či existence nějakých idealizovaných programů.³³ Turingovská řešitelnost je pouze velmi hrubým idealizovaným modelem reálné vyčíslitelnosti. Realitě podstatně bližším modelem je zde nikoli teorie rekurze, nýbrž výpočetní složitosti, která má podstatně jemnější měřítko „praktické vyčíslitelnosti“, dané např. polynomiální složitostí. I rekurzivní, tj. principiálně algoritmicky řešitelné úlohy jsou totiž často (mají-li například exponenciální složitost) prakticky neřešitelné již pro velmi malou velikost vstupu. I tento jemnější pojem polynomiální složitosti je však jen matematická idealizace neodpovídající přesně praktické proveditelnosti (srv. například vypočitatelnost v čase omezeném polynomelem stupně α pro α z pozn. 31). Praktická proveditelnost jakéhokoli výpočtu či simulace tedy záleží na mnohem přízemnějším věcech než Gödelových větech týkajících se *všech* přirozených čísel.³⁴

Z přesvědčení, že *v důsledku Gödelových vět* lidská mysl přesahuje možnosti formálních systémů (a tudíž klasických výpočetních modelů) vyvozují mnozí autoři dalekosáhlé závěry. Umělá inteligence pomocí klasických počítačů je podle nich nemožná, nebo aspoň vyžaduje použití zařízení přesahujících turingovskou výpočetní sílu (např. kvantových). Činnost lidského mozku vysvětlují pomocí kvantových efektů (tak zejména Penrose, viz [Pe]) a často hovoří o absolutní převaze lidské mysli nad neživou přírodou (např. [Lu]), s nejrůznějšími světonázorovými důsledky. Toto jejich přesvědčení se zakládá na následujícím chybném argumentu:

„Gödelův důkaz ukazuje, že Gödelova sentence pro daný formální systém je v tomto systému formálně nedokazatelná, nicméně pravdivá. Avšak tím, že Gödelův důkaz chápeme, nahlížíme (my lidé) i pravdivost příslušné Gödelovy sentence – vlastně jsme ji tak dokázali mimo rámec formalismu. Naše schopnosti (například nahlédnout pravdivost Gödelovy sentence) tak přesahují mož-

³³ Např. řešících zastavení *libovolně* velkých programů na *libovolně* velkých datech po *libovolně* mnoha taktech; pro programy omezené nějakou (i nepředstavitelnou) velikostí kódu α (kde α je např. číslo z pozn. 31), velikostí dat α a časem α je úloha *teoreticky* (prakticky jistě ne) rozhodnutelná prostým odsimulováním konečně (byť nepředstavitelně) mnoha kroků.

³⁴ To je i jedna z (většího počtu relevantních) odpovědí na častá tvrzení, že „lidská mysl nemůže být v důsledku Gödelových vět simulována počítačem“, popř. „být mechanistická“ [Lu], nebo že „svět nemůže být počítačovou simulací“. Mysl i svět, tak jak je vnímáme, jsou v matematickém smyslu principiálně simulovatelné už proto, že fakticky vnímáme jen konečné množství vstupů a výstupů.

nosti kteréhokoli formálního systému – a tedy i kteréhokoli počítače, neboť jeho činnost lze formálním systémem popsat, byť by byl sebesložitější.“

Abychom nahlédli chybnost této argumentace, stačí si uvědomit, že samu Gödelovu větu dokazujeme pomocí metod, které jsou plně formalizovatelné *v teorii množin*. Pravdivost Gödelovy sentence pro Peanovu aritmetiku (označme ji G_{PA}) tedy nahlížíme nikoli proto, že bychom nějak záhadně přesahovali možnosti počítače, nýbrž jen proto, že ji dokazujeme v silnější teorii – nikoli v PA, nýbrž v teorii množin (například ZF); tam ji však dokáže i náš počítač.

Pochopitelně v ZF zase nelze formálně dokázat Gödelovu sentence pro ZF (G_{ZF}) – zatímco my její pravdivost (prý) dokážeme pomocí Gödelova důkazu nahlédnout. *Avšak* podle Gödelova důkazu je G_{ZF} pravdivá pouze *za předpokladu*, že je teorie ZF bezesporná. Pravdivost G_{ZF} tedy nahlížíme jen na základě víry, že ZF je bezesporná; na základě této „víry“ (tedy s přidáním axiomu $Con(ZF)$) však dokáže důkaz G_{ZF} zreprodukovat i náš počítač (G_{ZF} je v teorii $ZF+Con(ZF)$ dokazatelná).

Můžeme sice tento argument iterovat,³⁵ nikam se tím však nedostaneme. Počítač totiž v ZF umí dokázat samotnou *Gödelovu větu*, tedy i on „ví“, že Gödelova sentence *libovolného* rekurzivního formálního systému za předpokladu jeho konzistence platí. Jistotu této konzistence však v případě tak silných teorií, jako je ZF, nemá ani on, ani my.³⁶ Při jejím postulování nemáme v případě dostatečně silné teorie o nic větší jistotu než počítač, který ji přijme mechanicky; naše „neformální nahlédnutí“ pravdivosti Gödelovy sentence G_T není tedy o nic lepší, než její formální důkaz v $T+Con(T)$.³⁷

Je tedy sice možné (byť sotva pravděpodobné), že schopnosti lidské mysli jsou dány kvantovými efekty v mikrotubulech neuronů (jak tvrdí Penrose); rozhodně to však nijak nevyplývá z Gödelových vět a ani to jimi nemůže být heuristicky podloženo.³⁸ Ze všech těchto důvo-

³⁵ Počítač neumí dokázat $G_{ZF+Con(ZF)}$, avšak ani my ji „nenahlížíme“ bez víry v $Con(ZF+Con(ZF))$, s níž ji dokáže i počítač atd.

³⁶ Naše přesvědčení o bezespornosti ZF je pouze empirické – za sto let se v ní žádný spor nenašel. Lze sice tvrdit, že vnitřním zrakem si (na rozdíl od počítače) univerzum množin umíme „představit“. Historické zkušenosti s postulováním sporných teorií (Cantorova naivní teorie množin, Fregova logika, původní Churchova verze λ -kalkulu aj.) však ukazují, že toto přesvědčení může být zcela mylné.

³⁷ Pro obdobnou formulaci tohoto vysvětlení mylnosti původního argumentu viz též [Po].

³⁸ Někteří autoři [Lu] ve snaze zachránit svůj závěr sklouznou do logických kruhů, rozmlžených formulací a neadekvátních popisů (mysl a jen mysl může „z principu“ tvrdit svoji konzistenci apod.). Nakonec mohou pouze uzavřít, že mysl není *jednoduchá* mašinka [Lu], což je zřejmě i bez Gödelových vět.

dů lze konstatovat, že Gödelovy věty nedávají žádnou indicii, že by projekt umělé inteligence byl nemožný, a to ani v rámci stávajících (turingovských) výpočetních modelů (na „klasickém“ počítači).

Literatura

Reference na online zdroje se vztahují k dubnu 2006. Některé z těchto zdrojů vyžadují předplatné (prola .aps .org, jstor .org, springerlink .com).

- [BŠ] Balcar, B., Štěpánek, P.: *Teorie množin*. Academia, Praha 2001 (1. vydání 1986).
- [Fe] Feferman, S.: Gödel's program for new axioms: Why, where, how and what? In P. Hájek (ed.): *Gödel '96*. Springer, New York etc. 1996: 3–22. (Preprint na math.stanford.edu/~feferman)
- [Go] Goldsteinová, R.: *Neúplnost. Důkaz a paradox Kurta Gödela*. Dokořan, Praha 2006.
- [Gö1] Gödel, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Mh. Math. Phys.* 37 (1930) 349–360.
- [Gö2] Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Mh. Math. Phys.* 38 (1931) 173–198. (Angl. překlad na home.ddc.net/ygg/etext/godel)
- [Gö3] Gödel, K.: Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. *Anz. Akad. Wiss. Wien* 69 (1932) 65–66.
- [Gö4] Gödel, K.: The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 24 (1938) 556–557. (Online na www.pubmedcentral.gov)
- [Gö5] Gödel, K.: An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation. *Rev. Mod. Phys.* 21 (1949). (Online na prola.aps.org)
- [Gö6] Gödel K., *Filosofické eseje*. Οικουμενη, Praha 1999.
- [Há] Hájek, P.: A new small emendation of Gödel's ontological proof. *Studia Logica* 71 (2002) 149–164. (Online na www.springerlink.com)
- [Ho] Hofstadter, D. R.: *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. Basic Books, New York 1979.
- [Ja] Jaki, S. L.: A late awakening to Gödel in physics. *Sensus Communis* 5 (2004) No. 2–3. (Online na pirate.shu.edu/~jakistan)
- [Kl] Kleene, S. C.: The work of Kurt Gödel. *J. Symb. Log.* 41 (1976) 761–778. (Online na www.jstor.org)
- [Kr] Kreisel, G.: Kurt Gödel. 28 April 1906 – 14 January 1978. *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, The Royal Society 1980. (Online na www.jstor.org)
- [Lu] Lucas, J. R.: Minds, machines and Gödel. *Philosophy* 36 (1961) 112–127. (Online na users.ox.ac.uk/~jrlucas)
- [NN] Nagel E., Newman, J. R.: *Gödelův důkaz*, Vutium, Brno 2003.
- [Pe] Penrose, R.: *Makrosvět, mikrosvět a lidská mysl*. Mladá fronta, Praha 1999.
- [Po] Podnieks, K.: *Вокруг теоремы Геделя*. Zinatne, Riga 1992. (Ruský originál a anglický překlad *What Is Mathematics: Gödel's Theorem and Around* na www.ltn.lv/~podnieks)
- [Sm1] Smullyan, R.: *Jak se jmenuje tahle knížka?* Mladá fronta, Praha 1986.
- [Sm2] Smullyan, R.: *Navěky nerozhodnuto*. Academia, Praha 2003.
- [So1] Sochor, A.: *Klasická matematická logika*. Karolinum, Praha 2001.
- [So2] Sochor, A.: *Metamatematika teorií množin*. Karolinum, Praha 2005.
- [Šv] Švejdar, V.: *Logika. Neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha 2002.
- [Tu] Turing, A. M.: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society* 2/42 (1936) 230–265. (Online na www.turingarchive.org)
- [Wi1] *Wikipedia*, en.wikipedia.org, hesla obsahující „Gödel“ a jimi odkazovaná.
- [Wi2] Willard, D. E.: Self-verifying axiom systems, the incompleteness theorem and related reflection principles. *J. Symb. Log.* 66 (2001) 536–596. (Online na www.jstor.org)
- [Zl1] Zlatoš, P.: *Ani matematika si nemůže být istá sama sebou*. Iris, Bratislava 1995 (Online verze na thales.doa.fmph.uniba.sk/zlatos)
- [Zl2] Zlatoš, P.: Gödelov ontologický dôkaz existencie Boha. *Organon F* 3 (1996) 211–238.

Summary

Kurt Gödel—life, results and their significance

Kurt Gödel is often regarded as the most remarkable logician of the XX century, especially for his famous Incompleteness Theorems. Besides the basic biographical and bibliographical data, the paper surveys his most important results and works that influenced mathematical logic and metamathematics (Completeness and Incompleteness Theorems, infinite-valuedness of intuitionistic logic), set theory (irrefutability of the continuum hypothesis and the axiom of choice, axioms for the theory of classes), philosophy of mathematics (the views presented in his essays), and other disciplines (a peculiar solution to Einstein's equations allowing time travel, a logical reconstruction of Anselm's ontological proof). In particular we focus on the consequences of Gödel's Incompleteness Theorems for computer science (Turing's results on algorithmic undecidability), artificial intelligence, philosophy, and other disciplines. Arguments are given to show why most applications of the Incompleteness Theorems to philosophy of science or philosophy of mind are inappropriate: first, the theorems only apply to ideal extrapolations to *all* natural numbers, while in reality we always have to deal with a finite part thereof; and second, since the proof of Gödel's theorems can be formalized in set theory (so a machine can prove it as well), and since we cannot be sure of the consistency of strong enough theories (like set theory), humans have no advantage over machines in seeing the truth of Gödel sentences.