

L. Běhounek: *Logical Foundations of Fuzzy Mathematics*

Abstract / Příloha disertační práce – anglický abstrakt

The dissertation consists of the author's published papers on logic-based fuzzy mathematics. It is accompanied with a cover study (Part I of the thesis), which introduces the area of logic-based fuzzy mathematics, argues for the significance of the area of research, presents the state of the art, indicates the author's contribution to the field, and comments on the papers comprising the thesis.

Fuzzy mathematics can be characterized as the study of *fuzzy structures*, i.e., mathematical structures in which the two values 0, 1 are at some points replaced by a richer system of degrees. Under the *logic-based* approach, fuzzy structures are formalized by means of *axiomatic theories* over suitable systems of *fuzzy logic*, whose rules replace the rules of classical logic in formal derivation of theorems. The main advantages of the logic-based approach are the general gradedness of defined notions, methodological clarity provided by the axiomatic method, and the applicability of a foundational architecture mimicking that of classical mathematics. Logic-based fuzzy mathematics is part of a broader area of non-classical mathematics (i.e., mathematical disciplines axiomatizable in non-classical logics), as well as a specific subfield of general fuzzy methods. Following earlier isolated developments in logic-based fuzzy set theory and arithmetic, a systematic logic-based study of fuzzy mathematics was made possible by recent advances of first-order fuzzy logic that opened the way for Henkin-style higher-order fuzzy logic (or simple fuzzy type theory), which is capable of serving as a foundational theory for logic-based fuzzy mathematics. The author's contribution to the development of logic-based fuzzy mathematics has been presented in the published papers that comprise the main body of the thesis.

The paper *On the difference between traditional and deductive fuzzy logic* clarifies methodological assumptions of formal fuzzy logic, contrasts them to those of traditional fuzzy mathematics, and indicates necessary conditions on systems of fuzzy logic suitable for logic-based fuzzy mathematics as developed in this thesis. The paper *From fuzzy logic to fuzzy mathematics: a methodological manifesto* (co-authored by P. Cintula) formulates methodological guidelines for logic-based fuzzy mathematics and proposes a foundational architecture analogous to that of classical mathematics, with three layers formed by first-order fuzzy logic, a foundational theory axiomatized in fuzzy logic, and particular mathematical disciplines developed within the foundational theory.

The paper *Fuzzy class theory* (co-authored by P. Cintula) introduces Henkin-style higher-order fuzzy logic (also called Fuzzy Class Theory or FCT) as an axiomatic approximation of Zadeh's notion of fuzzy set, and proposes it as a foundational theory for logic-based fuzzy mathematics. Metatheorems are proved for FCT that reduce a large part of elementary fuzzy set theory to propositional fuzzy logic, and the interpretability of classical higher-order theories in FCT (by which classical mathematical structures are available within the theory) is shown in the paper.

The paper *Relations in Fuzzy Class Theory: initial steps* (co-authored by U. Bodenhofer and P. Cintula) develops the basic theory of fuzzy relations in FCT, which is a prerequisite for all other parts of formal fuzzy mathematics. The topics studied include basic graded properties of fuzzy relations, relational images and bounds, Valverde characterization theorems, and fuzzy partitions. The paper *Relational compositions in Fuzzy Class Theory* (co-authored by M. Daňková) reduces a large family of fuzzy relational and set-theoretical notions to fuzzy relational compositions, and presents methods for mass

proofs of theorems on these notions. The paper *Extensionality in graded properties of fuzzy relations* introduces indistinguishability-relative graded properties of fuzzy relations and studies their relationship to the property of extensionality, to which they reduce in traditional fuzzy mathematics, but not in the logic-based setting.

The paper *Towards a formal theory of fuzzy Dedekind reals* constructs fuzzy real numbers as the lattice completion of the classical real line by fuzzy Dedekind cuts and gives some hints for logic-based fuzzy interval arithmetics. The paper *Fuzzification of Groenendijk–Stokhof propositional erotetic logic* employs FCT as the formal semantics for a logic of fuzzy questions. Finally, the papers *Topology in Fuzzy Class Theory: basic notions* and *Interior-based topology in Fuzzy Class Theory* (both co-authored by T. Kroupa) introduce logic-based notions of fuzzy topology defined respectively by open or closed sets, neighborhoods, and interior operators, and study their mutual relationships.

L. Běhounek: *Logical Foundations of Fuzzy Mathematics* Příloha disertační práce – český abstrakt / Czech abstract

Předložená disertační práce sestává z autorových publikovaných článků o logických základech fuzzy matematiky, doplněných shrnujícími studiemi (tvořící úvodní část disertace), ve které je představen na formálnělogický přístup k fuzzy matematice. Dále je v ní dokládána důležitost výzkumu v tomto oboru a charakterizován jeho současný stav, popsán autorův příspěvek k oboru a podány komentáře k jednotlivým článkům, z nichž se disertace skládá.

Fuzzy matematiku lze vymezit jako studium *fuzzy struktur*, tj. takových matematických struktur, v nichž je dvojice hodnot 0, 1 na některých místech nahrazena bohatším systémem stupňů. V přístupu založeném na formální logice jsou fuzzy struktury zachyceny prostřednictvím *axiomatických teorií* ve vhodných systémech *fuzzy logiky*, jejichž pravidla jsou použita pro formální odvozování teorémů namísto pravidel klasické logiky. Hlavními výhodami logického přístupu k fuzzy matematice jsou všeobecná gradualita definovaných pojmů, metodologická čistota daná aplikací axiomatické metody a použitelnost podobné základové architektury jako v klasické matematice. Na logice založená fuzzy matematika je součástí neklasické matematiky (tj. rodiny matematických teorií axiomatizovatelných v neklasických logikách), a zároveň tvoří specifickou část širšího oboru fuzzy metod. Systematické zkoumání fuzzy matematiky v přístupu založeném na logice, navazující na předchozí ojedinělé výzkumy podobného přístupu k teorii fuzzy množin a aritmetice, bylo umožněno nedávným pokrokem v oblasti prvořádkové fuzzy logiky. Díky němu bylo možno vyvinout henkinovskou fuzzy logiku vyššího řádu (čili jednoduchou fuzzy teorii typů), jež může sloužit jako základová teorie pro formální fuzzy matematiku. Autorovy příspěvky k výzkumu logických základů fuzzy matematiky byly publikovány v článcích, které tvoří hlavní část disertace.

Článek *On the difference between traditional and deductive fuzzy logic* (K rozdílu mezi tradiční a deduktivní fuzzy logikou) vyjasňuje metodologické předpoklady formální fuzzy logiky ve srovnání s předpoklady tradiční fuzzy matematiky a stanovuje požadavky na systémy fuzzy logiky vyhovující takovému přístupu k fuzzy matematice, jaký je rozvíjen v této disertaci. V článku *From fuzzy logic to fuzzy mathematics: a methodological manifesto* (Od fuzzy logiky k fuzzy matematice – metodologický manifest, spoluautor P. Cintula) jsou formulovány metodologické zásady na logice založeného přístupu k fuzzy matematice a je navržena její základová architektura způsobem analogickým k základům klasické matematiky, se třemi vrstvami tvořenými prvořádkovou fuzzy logikou, v ní axiomatizovanou základovou teorií a jednotlivými matematickými disciplínami vyvíjenými v rámci této základové teorie.

V článku *Fuzzy class theory* (Teorie fuzzy tříd, spoluautor P. Cintula) je zavedena henkinovská fuzzy logika vyššího řádu (zvaná též teorie fuzzy tříd, zkr. FCT z angl. Fuzzy Class Theory), jakožto axiomatická aproximace Zadehova pojmu fuzzy množiny. Tato teorie je zde navržena za základovou teorii pro formální fuzzy matematiku. V článku jsou dokázány metavěty FCT, které redukují značnou část elementární teorie fuzzy množin na výrokovou fuzzy logiku, a je ukázána interpretovatelnost klasických teorií vyššího řádu v FCT (díky níž jsou v FCT k dispozici klasické matematické struktury).

V článku *Relations in Fuzzy Class Theory: initial steps* (Relace v teorii fuzzy tříd – počáteční kroky, spoluautoři U. Bodenhofer a P. Cintula) jsou v rámci FCT vybudovány základy teorie fuzzy relací, jež tvoří nezbytný předpoklad zkoumání ostatních partií fuzzy matematiky. V článku se zkoumají zejména základní graduální vlastnosti fuzzy relací,

obrazy, závory, valverdovské charakterizace a fuzzy rozklady. V článku *Relational compositions in Fuzzy Class Theory* (Skládání relací v teorii fuzzy tříd, spoluautorka M. Daňková) popisuje redukci rozsáhlé rodiny pojmů teorie fuzzy relací a fuzzy množin na pojem skládání fuzzy relací a ukazuje metodu hromadných důkazů vět o těchto pojmech. Článek *Extensionality in graded properties of fuzzy relations* (Extenzionalita u graduálních vlastností fuzzy relací) zavádí graduální vlastnosti fuzzy relací definované relativně vůči dané relaci nerozlišitelnosti a studuje jejich vztah k vlastnosti extenzionality, s níž v tradiční fuzzy matematice splývají, v přístupu založeném na logice se však od ní liší.

Článek *Towards a formal theory of fuzzy Dedekind reals* (Předběžné poznámky k formální teorii dedekindovských fuzzy reálných čísel) podává konstrukci fuzzy reálných čísel pomocí svazového zúplnění klasické reálné číselné osy fuzzy dedekindovskými řezy a uvádí některé výsledky potřebné k vybudování fuzzy intervalové aritmetiky. V článku *Fuzzification of Groenendijk–Stokhof propositional erotetic logic* (Fuzzifikace výrokové Groenendijkovy–Stokhofovy erotetické logiky) je aparát FCT použit jako formální sémantika pro logiku fuzzy otázek. V závěrečných článcích *Topology in Fuzzy Class Theory: basic notions* (Topologie v teorii fuzzy tříd – základní pojmy) a *Interior-based topology in Fuzzy Class Theory* (Topologie definovaná pomocí operátoru vnitřku v teorii fuzzy tříd, spoluautor obou článků T. Kroupa) jsou v rámci přístupu založeném na logice zavedeny pojmy fuzzy topologie definované pomocí otevřených či uzavřených množin, okolí bodů a operátoru vnitřku a prozkoumány jejich vzájemné vztahy.